

**אלגברה לינארית להנדסה בר-אילן
מועד א' התשע"ט**

ד"ר שפרה רייף וד"ר מיטל אליהו רובינסון.
מתרגלים: אחיה בר-און, עוזי חרוש, יעל רוזנשטרק, הראל רוזנפלד.

זמן הבחינה: 3 שעות. הקדישו 30 דק' (לכל היותר!) לכל שאלה ותכננו את חלוקת הזמן!
מותר להשתמש במחשבוניו מדעיים פשוטים בלבד!

**בסוף הבחינה יש דפי טיוטה לשימושכם. אם תרצו לכתוב שם תשובות - סמנו זאת: המשך
לתשובה... בעמ' ...**

הערה: כל המרחבים הווקטורים בבחינה הם ממימד סופי.

בהצלחה!

שאלה	ניקוד
1	
2	
3	
4	
5	
6	
סה"כ	

1. מצאו מטריצה $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ סימטרית בעלת פולינום אופייני $f(x) = x^2(x-3)$ כאשר לערך

העצמי $x = 3$ יש וקטור עצמי $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

מצא $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ הפיכה ו $D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ אלכסונית כך ש $P^{-1}AP = D$.

.2

א. יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל שדה F ותהי $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית חח"ע. הוכח שהווקטורים $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$ בת"ל אם ורק אם $T(\vec{v}_1), \dots, T(\vec{v}_n) \in W$ בת"ל.

ב. מצא הע"ל **חד חד ערכית** $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ כך ש $T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ והוכיחו שהיא אכן כזו.

3. תהי $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ מטריצה אנטי סימטרית עם מקדמים ממשיים ויהיו λ, μ ע"ע שונים של A .
- א. הוכח ש λ הוא מדומה טהור כלומר $\lambda = bi$ עבור $b \in \mathbb{R}$.
- ב. הוכח שאם v, w הם וקטורים עצמיים של λ, μ בהתאמה אזי $\langle v, w \rangle = 0$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב \mathbb{C}^n .

4. יהי $F_4(t)$ מרחב הפולינומים ממעלה 4 ומטה במשתנה t מעל שדה F .

$$W = \{f \in F_4(t) \mid f(1) = 0\}$$
 ויהי

א. מצא בסיס ל W .

ב. מצא תתי מרחבים V_1, V_2, V_3 שונים של W כך ש $V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset W$.

.5

- א. יהיו $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך ש X הפיכה. הוכח $\text{rank}(XY) = \text{rank}(Y)$.
- ב. הוכח או הפרך: (כל המטריצות ממשיות והגודל שלהן מסומן כאינדקס)
- i. אם $A_{4 \times 4} = B_{4 \times 3} C_{3 \times 4}$ אזי A אינה הפיכה.
- ii. אם $D_{2 \times 2} = G_{2 \times 3} H_{3 \times 2}$ אזי D אינה הפיכה.

6. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל \mathbb{R} ($\langle *, * \rangle$) מכפלה פנימית כלשהי, לאו דווקא סטנדרטית) ויהי $\{u_1, \dots, u_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V . יהי $v \in V$.
- א. הוכח ש $v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle v, u_n \rangle u_n$.
- ב. תהי θ_i הזווית שבין v ל u_i לכל $1 \leq i \leq n$. הוכח ש $\cos^2 \theta_1 + \dots + \cos^2 \theta_n = 1$.

המשך תשובה

המשך תשובה

המשך תשובה