הגדרנו את הגראדיאנט ∇f לפי השוויון $\mathrm{d}f\left(v\right)=\left\langle \nabla f,v\right\rangle$ כאשר $\mathrm{d}f\left(v\right)=f_{/i}v^{i}$, כלומר:

$$f_{/i}v^{i}=\left(\nabla f\right)^{i}v^{i}g_{ij}$$

הערה: אי אפשר להגדיר את הגראדיינט ישירות, שכן אסור להתעלם מהמטריקה. במרחבים כלליים אין קשר ישיר בין ווקטורים לקו־ווקטורים - קשרים כאלה אפשריים רק כאשר יש מטריקה.

אם נסדר את זה מחדש, נקבל:

$$f_{/i}v^{i}=\left(\nabla f\right)^{j}g_{ij}v^{i}$$

רוצים שזה יתקיים לכל וקטור v, ולשם כך צריך שהמקדמים יהיו שווים בשני הצדדים:

$$\Longrightarrow\ f_{/i}=g_{ij}\left(\nabla f\right)^{j}$$

$$g^{ki}f_{/i}=g^{ki}g_{ij}\left(\nabla f\right)^{j}$$

אבל $g^{ki}g_{ij}=I$, ולכן:

$$g^{ki}f_{/i}=\delta^{k}{}_{j}\left(\nabla f\right)^{j}$$

$$g^{ki}f_{/i}=\left(\nabla f\right)^{k}$$

אינטואיציה - מה זה גראדיאנט ומה זה ווקטור

אם יש לנו מרחב דו מימדי ועקומות, אז אפשר להסתכל על כל העקומות העוברות דרך נקודה, וזה מגדיר(לפי המשיקים) מרחב וקטורי.

באותו מרחב יש גם פונקציות סקלריות - פונקציות שמגדירות ערך בכל נקודה. הפונקציות האלה מגדירים "קוי גובה" - קוים שבהם הפונקציה נותנת אותו ערך. הצפיפות של הקוים אותם וקטור חותך הם קצב העליה כאשר הולכים עם אותו וקטור.

באינפי יכולנו להגדיר גראדיאנט בכל נקודה - הכיוון בו העליה היא התלולה ביותר. אבל בשביל לקבוע איזו עליה היא התלולה ביותר צריך מטריקה - כי תלילות עליה זה הגובה שעולים חלקי המרחק שעברנו במרחב, ובשביל לקבוע כמה מרחק הלכנו במרחב צריך מטריקה.

להגדיר את הדיפרנציאל $\mathrm{d}f$ זה תמיד משמעותי, אבל לא תמיד יש לזה משמעות בתור וקטור. אם יש מטריקה אוטומטית זה נותן לדיפרנציאל משמעות של וקטור.

דוגמה

בספירת היחידה $g^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sin^2\theta} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $g=\begin{pmatrix}\sin^2\theta & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. אורך עקומה על פני הספירה הוא $S=\int\sqrt{\sin^2\theta\left(\mathrm{d}\varphi\right)^2+\left(d\theta\right)^2}$

נגדיר את הפונקציה $f=ax^2+by^2+cz^2$. נכתוב אותה בקואאורדינטות כדוריות:

$$f\left(\varphi,\theta\right)=\left(a\cos^2\phi+b\sin^2\varphi\right)\sin^2\theta+c\cos^2\theta$$

$$\mathrm{d}f=\left(-a2\cos\varphi\sin\varphi+2b\sin\varphi\cos\varphi\right)\sin\theta\mathrm{d}\varphi+\left[\left(a\cos^2\phi+b\sin^2\phi\right)2\sin\theta\cos\theta+2c\sin\theta\cos\theta\right]\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}f=\left(b-a\right)\sin^2\varphi\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi+\sin2\theta\left(a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi-c\right)\,\mathrm{d}\theta$$

$$\nabla f=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sin^2\theta} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(b-a\right)\sin2\varphi\sin^2\theta\\ \sin2\theta\left(a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi-c\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(b-a\right)\sin\left(2\varphi\right)\\ \sin2\theta\left(a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi-c\right)\end{pmatrix}$$

$$\left\langle\nabla f,v\right\rangle=\left(\nabla f\right)^t gv$$

הגדרה - נגזרת קו-וריאנטית

נגזרת קו-וריאנטית מוגדרת:

$$v^i_{;k}=v^i_{\prime k}+\underbrace{\Gamma^i_{kl}v^l}_{\text{connection}}$$

הגדרה - טנזור הפיתול(tortion)

טנזור הפיתול הוא טנזור מסדר $\binom{1}{2}$ המוגדר:

$$T\left(v,w\right)=\nabla_v w-\nabla_w v-\left[v,w\right]$$

ולכן

$$T\left(e_i,e_j\right)=\nabla_{e_i}e_j-\nabla_{e_j}e_i-\underbrace{\left[e_i,e_j\right]}_{=0}=\Gamma^k_{ij}e_k-\Gamma^k_{ji}e_k$$

ונקבל ש

$$T^k{}_{ij}=\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji}$$

הערה

מקדמי כריסטופל סימטריים בווקטורים התחתונים, ולכן אמור לצאת $T^k_{ij} = 0$!

אבל אנחנו הנחנו שסימני כריסטופל הם סימטריים. אם הם נובעים מתוך מטריקה הם אכן סימטריים. אבל אם אין מטריקה, אפשר להגדיר את סימני כריסטופל(הconnection) באופן שרירותי, ואז אפשר לקבל טנזור פיתול(tortion) שאינו אפס.

הגדרה

באמצעות הנגזרת הקו־וריאנטית אפשר להגדיר את הגראדיאנט ישירות:

$$(\nabla_v w)^k = v^i w^k_{;j}$$

פונקציונאלים

אם יש לנו מרחב פונקציות F, אז ההעתקה ממרחב הפונקציות למרחב הממשיים $S : F \to \mathbb{R}$ נקראת פונקציונאל.

אפשר להגדיר את S ע"י הפונקציה, הנגזרת שלה והפרמטר:

$$S(q) = \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L}(q, \dot{q}, t) \, \mathrm{d}t$$

כאשר $\mathscr{L}$ נקרא לגרנז'יאן.

דוגמה:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(q^2(t) + \dot{q}^2(t)\right) \mathrm{d}t$$

האורך של עקומות הוא:

$$\int \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \int \sqrt{1 + \dot{y}^2} \, \mathrm{d}x$$

המטרה שלנו היא לפתח בדרך אחרת את משוואת הקו הגיאודזי כך שתיתן את המרחק הקצר ביותר בין שתי נקודות עבור מטריקה כללית.

נסתכל על על העקומות המקיימות $\begin{matrix} q(t_1) = q_1 \\ q(t_2) = q_2 \end{matrix}$ (כלומר כל העקומות שקבועות בשתי נקודות הקצה). נרצה למצוא את אלו שנותנות ערך מינימלי לאינטגרל הזה.

נשים לב שעושים כאן מינימיזציה על אינסוף משתנים!

אפשר להשתמש בזה גם כדי למצוא משטחים מינימליים.

משפט

תנאי הכרחי(אבל לא מספיק!) להיותה של פונקציה $q(t)$, גזירה פעמיים(לפחות), מינימום של הפונקציונאל

$$S = \int \mathscr{L}\left(q\left(t\right), \dot{q}\left(t\right), t\right)\, \mathrm{d}t$$

הוא שq מקיימת את המשוואה(משוואת אוילר־לגרנז'):

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}}$$

למה

תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה. אם מתקיים

$$\int_a^b f\left(x\right) g\left(x\right)\, \mathrm{d}x = 0$$

לכל פונקציה g חלקה(C^∞) אזי $\forall_{x\in[a,b]} f\left(x\right) = 0$.

הוכחת הלמה

נניח שהלמה לא נכונה, כלומר $\varepsilon = \left|f\left(x_0\right)\right| \neq 0$ בנקודה $x_0 \in [a,b]$. אזי מהרציפות קיים תחום $[x_1, x_2]$ שבכל נקודה $x \in [x_1, x_2]$ בו $\left|f\left(x\right)\right| > \frac{\varepsilon}{2}$.
נבנה את הפונקציה g:

$$g\left(x\right) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x_1 - x} + \frac{1}{x - x_2}} & x \in (x_1, x_2) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

נשים לב הפונקציה שואפת ל0 כאשר $x \to x_1^+, x_2^-$, ושהמעבר הוא חלק. אזי:

$$\int_a^b f\left(x\right) g\left(x\right)\, \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} f\left(x\right) g\left(x\right)\, \mathrm{d}x > \frac{\varepsilon}{2}\int_{x_1}^{x_2} g\left(x\right)\, \mathrm{d}x > 0$$

בסתירה לתנאי הלמה.

■

הוכחת המשפט

תהי $q\left(t\right)$ המקיימת $\begin{array}{l} q\left(t_1\right) = q_1 \\ q\left(t_2\right) = q_2 \end{array}$ ותהי h פונקציה כלשהי המקיימת $h\left(t_2\right) = h\left(t_1\right) = 0$.
אזי כל פונקציה מהצורה

$$f\left(t\right) = q\left(t\right) + h\left(t\right)$$

מקיימת

$$f\left(t_1\right)=q_1 \qquad f\left(t_2\right)=q_2$$

נסמן:

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\mathscr{L}\left(q\left(t\right),\dot{q}\left(t\right),t\right)\,\mathrm{d}t$$

ונסמן

$$S^{*}=\int_{t_1}^{t_2}\mathscr{L}\left(q\left(t\right)+\varepsilon h\left(t\right),\dot{q}\left(t\right)+\varepsilon\dot{h}\left(t\right),t\right)\,\mathrm{d}t$$

עבור $\varepsilon\neq0$ כלשהו.

תנאי הכרחי לכך ש$q\left(t\right)$ תיתן את המינימום עבור S הוא:

$S\leq S^{*}$ לכל $h\left(t\right)$ ולכל ε

כלומר:

$$\delta S=S^{*}-S\geq0$$

כלומר כל שינוי בפונקציה q יגדיל את הערך של S.

$$S^{*}=\int_{t_1}^{t_2}\mathscr{L}\left(q\left(t\right)+\varepsilon h\left(t\right),\dot{q}\left(t\right)+\varepsilon\dot{h}\left(t\right),t\right)\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\left(\mathscr{L}\left(q,\dot{q},t\right)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q}\varepsilon h+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\varepsilon\dot{h}+o\left(\varepsilon\right)\right)\,\mathrm{d}t$$

$$S^{*}-S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q}\varepsilon h+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}\varepsilon\dot{h}+o\left(\varepsilon\right)\right)\,\mathrm{d}t$$

נבצע אינטגרציה בחלקים:

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}\dot{h}\,\mathrm{d}t=\left.\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}h\right|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}\right)h\,\mathrm{d}t$$

נציב חזרה בתוך הδS לקבל:

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}h\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}\right)\,\mathrm{d}t+o\left(\varepsilon\right)$$

תמיד ניתן לבחור ε מספיק קטן כך שהביטוי $o\left(\varepsilon\right)$ יהיה זניח יחסית לε.

אם $\int h\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}\right)>0$ אזי נבחר $\varepsilon<0$ ונקבל $\delta S<0$ בסתירה למינימליות.

כנ"ל אם $\int h\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}\right)<0$ נבחר $\varepsilon>0$ ונקבל $\delta S<0$. לכן תנאי הכחרי למינימליות הוא:

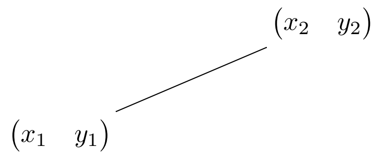
$$\int_{t_1}^{t_2}h\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}}\right)\,\mathrm{d}t=0$$

לכל h. לפי הלמה נובע:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} = 0$$

■

אז איך מחשבים את המרחק המינימלי



$$\int \sqrt{dy^2 + dx^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}x$$

$$0 = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}} = \mathrm{const} = \frac{\cancel{2}\dot{y}}{\cancel{2}\sqrt{1+\dot{y}^2}}$$

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} = c$$

$$\dot{y}^2 = c\left(1 + \dot{y}^2\right)$$

$$\dot{y}^2\left(1 - c\right) = c$$

$$\dot{y}^2 = \frac{c}{1-c} = \tilde{c}^2$$

$$\dot{y} = \tilde{c}$$

$$y = \tilde{c}x + c_2$$

וקיבלנו(כצפוי) שהמרחק הקצר ביותר במישור הוא קו ישר.

אורך של עקומה בגיאומטריה דיפרנציאלית הא

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}\,\mathrm{d}t$$

נגדיר באופן כללי

$$\mathscr{L}\left(q_1, q_2, \ldots \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots t\right)$$

ע"י

$$\forall_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

נגזור לפי כל רכיב פרט לt(כלומר לפי כל q_i ולפי כל $\dot{q}_i$):

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^k} = \frac{g_{ij\prime k}\dot{x}^i\dot{x}^j}{2\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}} \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}^k} = \frac{2g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k}{2\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}$$

נציב במשוואת אויילר לגרנז':

$$\frac{g_{ij\prime k}\dot{x}^i\dot{x}^j}{\cancel{2}\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{2g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^j}{\cancel{2}\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}$$

לשם הפשטות נניח $\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j} = 1$ לקבל

$$g_{ij\prime k}\dot{x}^i\dot{x}^j = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g_{ik}\dot{x}^i\right)$$

$$g_{ij\prime k}\dot{x}^i\dot{x}^j = 2\left(g_{ik\prime j}\dot{x}^j\dot{x}^i + g_{ik}\ddot{x}^i\right)$$

$$g_{ik}\ddot{x}^i + \frac{1}{2}\left(2g_{ik\prime j} - g_{ij\prime k}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j = 0$$

$$g_{ik}\ddot{x}^i + \underbrace{\frac{1}{2}\left(g_{ik\prime j} + g_{jk\prime i} - g_{ij\prime k}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j}_{\Gamma_{ijk}} = 0$$

הערה: הביטוי Γ_{ijk} נקרא סמל כריסטופל מהסוג הראשון(כאשר Γ^k_{ij} הוא מסוג השני).

$$g^{lk}g_{ij}\ddot{x}^i + \frac{1}{2}g^{lk}\left(g_{ih\prime j} + g_{jh\prime i} - g_{ij\prime k}\right) = 0$$

$$\boxed{\ddot{x}^l + \Gamma^l_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0}$$

וקיבלנו שוב את משוואת הקווים הגיאודזים, אמנם בדרך יותר מסובכת ־ אבל יותר כללית.