פתרון מבחן לדוגמה - תורת החבורות

① חשבו את מספר ההומ' מ- $Inn(D_4)$ לעצמה.

<u>פתרון</u>. ראינו בהרצאה כי:

$$Inn(G)\cong G/Z(G)$$

נטען כי: $Inn(D_4)\cong D_4/Z(D_4)\cong \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

הוכחה לטענה זו:

$|D_4|=8$ חבורת-2, לכן המרכז לא טריוויאלי.

המנה $D_4/Z(D_4)$ לא ציקלית, כי ראינו בכיתה שאם $G/Z(G)$ ציקלית אז G אבלית, ו-D_4 איננה אבלית.

לכן $|D_4/Z(D_4)|=4$, כל חבורה מסדר זה (p^2) אבלית

ולכן משפט מיון חבורות אבליות, האפשרות הלא ציקלית היחידה היא $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

<u>הערה</u>: היינו מקבלים גם הוכחה ישירה יותר באמצעות בניית אפימורפיזם $D_4\twoheadrightarrow\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ שגרעינו $Z(D_4)$, במקום שהנימוקים הנ"ל מלאים ז"ם.

רק אז יען, מספר ההומ׳ המבוקש בשאלה הוא כמספר

ההומ׳ מ- $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ לעצמה. רצינו כי לחקור —

אבל זה: — $\mathrm{Hom}(G_1\times G_2, H)\cong \mathrm{Hom}(G_1,H)\times \mathrm{Hom}(G_2,H)$

$$\mathrm{Hom}(G, H_1\times H_2)\cong \mathrm{Hom}(G,H_1)\times \mathrm{Hom}(G,H_2)$$

ולכן בפרט אצלנו:

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)\cong$$

$$\cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2)\underbrace{\times\ \cdots\ \times}_{\text{4 עותקים}}\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2)$$

כל הומ׳ מחבורה ציקלית נקבע ע״י תמונת יוצר שלה,

ולכן יש $\underline{\underline{2}}$ הומ׳ מ- $\mathbb{Z}_2$ ל- $\mathbb{Z}_2$.

לסיכום, יש $2\cdot2\cdot2\cdot2=\boxed{16}$ הומ׳ כמבוקש.

//

(2) תהא G חבורה סופית שכל תת"ח שלה נורמלית.
הוכיחו כי G פתירה.

פתרון: באינדוקציה על $|G|$. עבור $|G|=1$
הטענה ברורה.

תהא $G\neq\{e\}$ סופית. יהי $e\neq g\in G$, אזי מהנתון:

$$\langle g\rangle \trianglelefteq G.$$

נתבונן ב- $\tilde{G}:=G/\langle g\rangle$. נטען כי היא גם מקיימת
את התכונה שכל תת"ח היא נורמלית. תהא $K\leq\tilde{G}$,
לפי משפט ההתאמה $K=H/\langle g\rangle$ לאיזו $\langle g\rangle\subseteq H\leq G$.
אך לפי הנתון $H\trianglelefteq G$, ולכן (שוב לפי משפט ההתאמה)
גם $K\trianglelefteq\tilde{G}$.

מנגד,

$$|\tilde{G}|=\frac{|G|}{|\langle g\rangle|}=\frac{|G|}{o_G(g)}\underset{g\neq e}{<}|G|$$

ולכן מהנחת האינדוקציה $\tilde{G}$ פתירה. אבל גם $\langle g\rangle$
פתירה (בהיותה ציקלית), ולכן גם G פתירה, בתור
הרחבה של פתירה עם פתירה.

(3) (1) תהא G חבורה מסדר 60. הוכיחו כי ל-G ת"ח מאינדקס 3 או 6.

(2) הוכיחו/הפריכו: אם G סופית מסדר m_1m_2 כאשר $\gcd(m_1,m_2)=1$ אז יש ל-G ת"ח מסדר m_1.

פתרון:

(1) $60=2^2\cdot 3\cdot 5$ וממשפטי סילו:

$$\begin{cases} n_5(G)\equiv 1 \pmod 5 \\ n_5(G)\mid 12 \end{cases} \Longrightarrow n_5(G)\in\{1,6\}$$

מקרה 1: אם $n_5(G)=6$ פירושו ש- $[G:N_G(P)]=6$ כאשר P ת"ח 5-סילו כלשהי של G.

הערה: השתמשנו בכך ש- $[G:N_G(P)]=n_p(G)$ באופן חופשי.
הסבר לכך: $G\curvearrowright Syl_p(G)$ טרנזיטיבית בהצמדה, והמייצב של P בפעולה זו הינו $N_G(P)$. ממשפט המסלול-מייצב:

$$[G:N_G(P)]=|orbit(P)|=n_p(G)$$

מקרה 2: $n_5(G)=1$ ולכן $P\trianglelefteq G$ ת"ח 5-סילו נורמלית.

ונתבונן ב- G/P - זוהי חבורה מסדר 12.

תהא $Q\le G/P$ ת"ח 2-סילו של G/P, אזי $[G/P:Q]=3$. ממשפט ההתאמה $Q=K/P$ לאיזו $P\subseteq K\le G$, ואז האינדקס נשמר:

$$[G:K]=[G/P:K/P]=[G/P:Q]=3.$$

//

(2) הפרכה - ניקח $G = A_5$, מסדר 60.

$60 = 20\cdot 3$ אך לו הייתה ל-A_5 ת"ח H מאינדקס 3 (כלומר מסדר 20), הרי שהפעולה הטרנזיטיבית

$$A_5 \curvearrowright A_5/H$$

הייתה משרה הומ' לא טריוויאלי:

$$\varphi : A_5 \longrightarrow S_{[A_5:H]} \cong S_3$$

אך A_5 פשוטה ולכן $\operatorname{Ker}\varphi = \{e\}$ (φ אינו טריוויאלי שכן הפעולה $A_5 \curvearrowright A_5/H$ טרנזיטיבית), כלומר:

$$\varphi : \underbrace{A_5}_{\substack{\text{מסדר}\\ 60}} \hookrightarrow \underbrace{S_3}_{\substack{\text{מסדר}\\ 6}} \quad \text{שיכון}$$

בסתירה לסדרים.

//

4) (1) הוכיחו שלכל חבורה G יש פעולה טרנזיטיבית ונאמנה על קבוצה X רק ש- $|X|=|G|$.

(2) תהא G אבלית סופית הפועלת נאמנה וטרנזיטיבית על X, אזי $|G|=|X|$.

פתרון:

(1) תהא $G \curvearrowright G$ הפעולה הרגולרית בכפל משמאל. פעולה זו טרנזיטיבית ונאמנה (הוכח בכיתה).

(2) נניח $G \curvearrowright X$ טרנזיטיבית ונאמנה, ו-G אבלית. אזי לכל $x,y\in X$ יש $g\in G$ כך ש- $g\cdot x=y$ ולכן:

$Stab_G(x) = g\, Stab_G(y)\, g^{-1}$ (כפי שהוכח בכיתה).

אך G אבלית ולכן נקבל כי: $Stab_G(x)=Stab_G(y)$.

יהי $x_0\in X$ כלשהו. אם $Stab_G(x_0)\neq\{e\}$ אזי:

$$\{e\} \neq Stab_G(x_0) = \bigcap_{x\in X} Stab_G(x)$$

הוכחנו כי כל המייצבים שווים זה לזה.

ובפרט הפעולה לא נאמנה (איבר לא טריוויאלי בחיתוך המייצבים פועל טריוויאלית על כל X).

לכן $Stab_G(x_0)=\{e\}$. ממשפט המסלול-מייצב:

$$|X| = |Gx_0| = \frac{|G|}{|Stab_G(x_0)|} = |G|$$

נתון כי הפעולה טרנזיטיבית

כנדרש.

//