

תרגיל בית 1 במבנים אלגבריים 89-214 סמסטר א' תשע"ט

שאלה 1 (חימום). תהי G חבורה עם איבר יחידה e . יהי $a \in G$ איבר. הוכיחו:

א. אם $aa = a$, אז $a = e$.

ב. אם יש $b \in G$ כך ש- $ab = e$, אז $ba = e^{-1}$.

שאלה 2. בחרו כמה סעיפים וענו עבור המערכת האלגברית המופיעה בו:

האם היא אגודה?

האם היא מונואיד? אם כן, מי הוא איבר היחידה?

האם היא חבורה?

האם הפעולה היא חילופית?

א. (\mathbb{N}, \max) , המספרים הטבעיים עם הפעולה של בחירת המקסימום.

ב. $(\mathbb{N}, *)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה $a * b = a + b + 2$.

ג. תהי X קבוצה. $(P(X), \Delta)$, כאשר $P(X)$ היא קבוצת החזקה של X . הפעולה היא ההפרש הסימטרי המוגדר לכל $A, B \in P(X)$ לפי $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

ד. הקבוצה הבאה ביחס לחיבור מטריצות

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$$

ה. (A, \cdot) , הקבוצה מן הסעיף הקודם ביחס לכפל מטריצות.

ו. $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, *)$, המספרים הרציונלים בלי -1 עם הפעולה $a * b = a + b + ab$.

שאלה 3. תהינה $(G, *)$ ו- (H, \bullet) חבורות. נגדיר על המכפלה הקרטזית $G \times H$ פעולה "רכיב-רכיב":

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \bullet h_2)$$

$$\text{לכל } g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H$$

א. הוכיחו כי $G \times H$ עם הפעולה לעיל היא חבורה. היא נקראת המכפלה הישרה (החיצונית) של G ו- H .

ב. הוכיחו או הפריכו: החבורה $G \times H$ אבליית אם ורק אם G ו- H אבלייות.

שאלה 4. תהי G חבורה. הוכיחו כי G אבליית אם ורק אם לכל $a, b \in G$ מתקיים כי $(ab)^2 = a^2 b^2$.

שאלה 5. תהי $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ חבורה אבליית סופית. נסמן $b = a_1 a_2 \cdots a_n$ מכפלת כל איברי G . הוכיחו כי $b^2 = e$. רשות: מצאו קריטריון מתי $b = e$.

בהצלחה!