מערך תרגול 14 מופשטת 3

תזכורת 14.1 פולינום $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ פולינום עם שדה פיצול E אזי f פתיר על ידי רדיקלים אם ורק $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ חבורה פתירה.

שאלה 14.2 האם הפולינום $f(x) = 5x^5 - 100x + 10$ פתיר על ידי רדיקלים?

תשובה: ראשית נשים לב שהפולינום אי פריק ע"י איזשטיין עם $p = 2$. נסמן ב E את שדה הפיצול שלו. צריך להבין מה חבורת גלואה $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$. כמובן של f יש 5 שורשים. הנגזרת שלו היא

$$f'(x) = 25x^4 - 100$$

היא מתאפסת כאשר

$$x^4 = 4$$

כלומר

$$x = \pm\sqrt{2}$$

היות ש

$$f''(x) = 100x^3$$

אז

$$f(\sqrt{2}) > 0, \quad f(-\sqrt{2}) < 0$$

ולכן אלה נקודות מינימום ומקסימום. בנוסף. קל לבדוק ש

$$f(\sqrt{2}) < 0$$

ו

$$f(-\sqrt{2}) > 0$$

ומכל האינפורמציה הזאת אפשר להבין שהפונקציה חותכת את ציר x שלוש פעמים ולכן יש 3 שורשים ממשיים ו2 מרוכבים. לפי תרגיל שעשינו כבר בעבר (אם כי שווה להיזכר בנימוק שלו) חבורת גלואה היא S_5 שהיא לא פתירה.

(למה? מוכיחים בתורת החבורות שיש לה רק תת חבורה נורמלית אחת והיא A_5 ו A_5 פשוטה ולא אבלית).

תרגיל 14.3 תהי E/F הרחבת גלואה עם חבורת גלואה פתירה. הוכיחו כי יש הרחבת ביניים K/F כך ש $[K : F] = p$ ראשוני.

פתרון: היות ש $G = \mathrm{Gal}(E/F)$ פתירה, יש $H \lhd G$ כך ש G/H היא חבורה אבלית פשוטה, דהיינו $\mathbb{Z}_p$ עבור p ראשוני. נגדיר $K = E^H$. לפי התאמת גלואה

$$[K : F] = [E^H : E^G] = [G : H] = p$$

כנדרש.

הערה 14.4 אם G לא הייתה פתירה, הטענה לא נכונה. מפני שיש חבורות ללא תת חבורה מאינדקס ראשוני.

תרגיל 14.5 הוכיחו שדה סופי F אינו יכול להיות סגור אלגברית.

פתרון: אם $F = \{a_1, \dots, a_n\}$ אז לפולינום

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (c - a_n) + 1$$

אין שורש ב F.

הערה 14.6 מכאן נעשה כל מיני תרגילים כחזרה למבחן

תרגיל 14.7 הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאהף יהי $f(x) \in F[x]$ פולינום אי פריק מדרגה n. אז בחבורת גלואה שלו (כלומר חבורת גלואה של $\mathrm{Gal}(E/F)$ כאשר E שדה פיצול של F) יש איבר מסדר n.

פתרון: הפרכה: נסתכל על ההרחבה $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$ אנחנו כבר יודעים שחבורת גלואה שלה היא $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. כבר ראינו בעבר ש

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

אם ניבחר את $f(x)$ להיות הפולינום המינימלי של $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ אז קיבלנו הפרכה.

הערה 14.8 ראינו כבר בעבר שאם n ראשוני הטענה כן נכונה. משום שבמקרה כזה $n \mid |\mathrm{Gal}(E/F)|$ ואז יש איבר מסדר n לפי משפט קושי.

תרגיל 14.9 יהי ρ_n שורש יחידה n־פרימיטבי. יהי $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{Q}(\rho_n)$. יהי $a \in K$ ויהי f הפולינום המינימלי של a. הוכיחו כי $f(x)$ מתפצל מעל K.

פתרון: אם עוברים דרך כל הנתונים מגלים שכל מה שצריך להראות זה ש K/F היא הרחבה נורמלית. אבל זה ברור מפני שחבורת גלואה $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\rho_n)/\mathbb{Q}) \cong U_n$ היא אבלית ולכן כל תת חבורה, היא נורמלית ולכן לפי התאמת גלואה כל הרחבת ביניים היא גלואה.

תרגיל 14.10 תהי K/F הרחבת שדות ממימד n ויהי $f(x) \in F[x]$ פולינום אי פריק מדרגה m. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א: אם $m \nmid n$ אז ל $f(x)$ אין שורש מעל K.

פתרון: אכן. אם היה לו שורש α אז היה

$$F \subseteq F(\alpha) \subseteq K$$

ולפי כפליות היינו מקבלים ש

$$m = [F(\alpha) : F] \mid [K : F] = n$$

בסתירה. ב: אם $m \nmid n$ אז $f(x)$ אי פריק מעל K. **פתרון:** לא בהכרח. למשל אם $F = \mathbb{Q}$ ו $K = \mathbb{Q}(i)$ כלומר $m = 2$ו

$$f(x) = \Phi_8 = x^4 + 1$$

זה פולינום אי פריק כמובן (ציקלוטומי). $m=4$. אבל מעל K הוא מתפרק

$$(x^2-i)(x^2+i)$$

ג: אם $\gcd(m,n)=1$ אז $f(x)$ אי פריק מעל K. **פתרון:** נכון. נניח בשלילה שהוא מתפרק $f(x)=g(x)h(x)$ כאשר $g(x)$ אי פריק מעל K. יהי α שורש של $g(x)$. עכשיו

$$[K(\alpha):K]=\deg g(x)$$

ולכן

$$[K(\alpha):F]=n\deg g(x)$$

אבל

$$F(\alpha)\subseteq K(\alpha)$$

וברור ש

$$[F(\alpha):F]=m$$

ולכן

$$m\mid n\deg g(x)$$

אבל $\gcd(m,n)=1$ ולכן

$$m\mid \deg g(x)$$

בסתירה.

תרגיל 14.11 מה חבורת גלואה של x^6-2? (כלומר מהי $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כאשר E שדה הפיצול של הנ"ל).

פתרון: אנחנו כבר יודעים ש

$$E=\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2},\rho)$$

כאשר $\rho=e^{\frac{2\pi i}{6}}$. ברור ש

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2}):\mathbb{Q}]=6$$

הפולינום המינימלי של ρ מעל $\mathbb{Q}$ הוא מדרגה $\varphi(6)=2$. זה אותו פולינום מעל $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$ (כי $\rho\notin\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$ הוא הרי מרוכב) ולכן

$$[E:\mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})]=2$$

ובסך הכל

$$[E:\mathbb{Q}]=12$$

כמובן שזו הרחבת גלואה ולכן חבורת גלואה היא תת חבורה של S_6 מגודל 12. נסמן $G = \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$. זה זמן טוב לחשוד ש $G \cong D_6$

נתחיל לחפש אוטומורפיזמים כדי לפרוש את החבורה שלנו. נשים לב ש $x^6 - 2$ הוא הפולינום המינימלי של $\sqrt[6]{2}$ גם מעל $\mathbb{Q}(\rho)$. חבורת גלואה $H = \mathrm{Gal}(E : \mathbb{Q}(\rho)) \leq G$ היא בגודל 6פועלת טרזיטיבית על שורשי הפולינום. קל לראות שהאיבר שמוגדר לפי

$$\sigma(\sqrt[6]{2}) = \sqrt[6]{2}\rho$$

יוצר אותה. (ולכן החבורת גלואה הזאת היא בעצם $\mathbb{Z}_6$).

כמו כן יש את האיבר ב G שהוא הצמדה מרוכבת τ. נשים לב ש $\tau^2 = \mathrm{id}$ ובנוסף

$$\tau\sigma(\sqrt[6]{2}) = \tau(\sqrt[6]{2}\rho) = \sqrt[6]{2}\rho^5 = \sigma^5(\tau(\sqrt[6]{2}))$$

$$\tau\sigma(\rho) = \tau(\rho) = \rho^5 = \sigma^5\tau(\rho)$$

לכן היחסים של D_6 מתקיימים ולכן החבורה שלנו היא חבורת מנה של D_6 אבל היות שהיא בגודל 12 היא צריכה להיות בדיוק D_6.