מערך תרגול 6 מופשטת 3

הגדרה 6.1 נניח $F, L \subseteq K$. קיים תת שדה של K שהוא התת שדה הקטן ביותר המכיל את F, L והוא מסומן בדר"כ FL או $F \vee L$.

תרגיל 6.2 יהיו $F \subseteq B \subseteq E$ שדות כך ש E שדה פיצול של פולינום $f(x) \in E[x]$ כלשהוא וB מכיל שורש a כלשהוא של $f(x)$. הוכיחו כי ניתן למצוא $B_1, \ldots, B_k$ תתי שדות של E שכולם איזומורפיים ל B כך ש

$$E = B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_k$$

פתרון: נסמן ב $b_1, \ldots, b_k$ את שורשי F. ראינו כבר שיש איזומורפיזמים

$$f_i : F(a) \to F(b_i)$$

ואפשר להרחיב אותם

$$f_i : E \to E$$

נסמן ב B_i את $f_i(B)$. אז כמובן

$$B_i \cong B$$

לכל i מתקיים ש $B_i \subseteq E$ ולכן

$$B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_k \subseteq E$$

מצד שני כל השורשים של F שייכים ל $B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_k$ ולכן

$$E \subseteq B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_k$$

וקיבלנו שוויון כנדרש.

תזכורת 6.3 הרחבת שדות $F \subseteq K$ נקראת ספרבילית אם לכל $a \in K$ הפולינום המינימלי של a מעל F הוא ספרבילי.

תזכורת 6.4 אם $f(x)$ אי פריק אז הוא לא ספרבילי אם ורק אם $f'(x) = 0$.

תזכורת 6.5 כל הרחבה ממאפיין 0 היא ספרבילית וכן כל הרחבה של שדות סופיים.

תזכורת 6.6 שדה שכל פולינום אי פריק מעליו הוא ספרבילי נקרא מושלם. לפי ההערה הקודמת, כל שדה ממאפיין 0 וכל שדה סופי הם מושלמים.

תרגיל 6.7 תהי $F \subseteq L \subseteq K$ הרחבת שדות כך ש K/L ספרבילי. אז גם L/F וגם K/L ספרביליים.

פתרון: ברור ש L/F ספרבילית. כי לכל $a \in L \subseteq K$ הפולינום המינימלי ספרבילי. כמו כן, אם $a \in K$ הפולינום המינימלי מעל L מחלק את הפולינום המינימלי מעל F ולכן הוא ספרבילי.

הערה 6.8 אם L/F ו K/L ספרביליים, גם K/F ספרבילי - לא נוכיח את זה.

תרגיל 6.9 הוכיחו כי הרחבה סופית של שדה מושלם היא שדה מושלם.

פתרון: די נובע מהתרגיל הקודם. בעצם הסיטואציה היא של

$$F \subseteq L \subseteq K$$

כאשק ידוע ש K/F ספרבילי וצרילך להוכיח ש K/L ספרבילי. אם יש זמן: עוד תרגילים על כל מיני נושאים:

תרגיל 6.10 תהי K/F הרחבת שדות ויהי $a \in K$ כך שהפולינום המינימלי שלו מדרגה אי זוגית. הוכיחו כי $F(a) = F(a^2)$

פתרון: ברור כי $F(a^2) \subseteq F(a)$. צריך להוכיח שוויון. לפי כפליות המימד

$$[F(a):F] = [F(a):F(a^2)][F(a^2):F]$$

נניח בשלילה ש

$$[F(a):F(a^2)] \neq 1$$

אז הפולינום המינימלי של a מעל $F(a^2)$ הוא $x^2 - a^2$. ולכן

$$[F(a):F(a^2)] = 2$$

בסתירה לכך ש

$$[F(a):F]$$

הוא אי זוגי.

תזכורת 6.11 אם F שדה ממאפיין 0. התת שדה שנוצר ע"י 1 איזומורפי ל $\mathbb{Q}$. אם F ממאפיין p אז התת שדה שנוצר ע"י 1 איזומורפי ל $\mathbb{Z}_p$ לכן ניתן להניח ש $\mathbb{Z}_p \subseteq F$.

תרגיל 6.12 יהי F שדה סופי ממאפיין p. ידוע כי $\mathbb{Z}_p \subseteq F$. נניח שהגודל של F הוא n (למעשה $n = p^k$ משיקולי מימד אבל זה לא עקרוני כרגע) הוכיחו כי F שדה פיצול של $x^n - x \in \mathbb{Z}_p[x]$.

פתרון: נשים לב ש $x^n - x = (x^{n-1} - 1)x$ היות ש $F^* = F \backslash \{0\}$ היא חבורה בגודל n. מתקיים שלכל $a \in F^*$ $a^{n-1} = 1$. כלומר כל אברי F מאפסים את הפולינום $x^n - x$ ולכן לפולינום יש לפחות n שורשים שונים. כמו כן אין לו יותר מ n שורשים כי הוא ממעלה n. ולכן F שדה פיצול.

תרגיל 6.13 הסיקו כי כל שני שדות מאותו גודל הם איזומורפיים.

פתרון: כבר ראינו שכל שני שדות פיצול של אותו פולינום הם איזומורפיים.