מבנים אלגבריים תרגול 4

12 באפריל 2021

1 מכפלה של חבורות

תהיינה $(G,*),(H,\cdot)$ שתי חבורות. אזי נגדיר את חבורת המכפלה $(G\times H,\circ)$ ע"י: הקבוצה היא כמובן המכפלה הקרטזית, והפעולה:

$$(g_1,h_1)\circ(g_2,h_2)=(g_1*g_2,h_1\cdot h_2)$$

נסמן את איברי היחידה e_G,e_H אז איבר היחידה של המכפלה זה (e_G,e_H).
תרגילים:

1. הוכיחו: מכפלה של חבורות אבליות היא חבורה אבלית.
פתרון: תהיינה G,H חבורות אבליות, נראה שגם $G\times H$ אבלית: כלומר, יהיו $(g,h),(a,b)\in G\times H$ צריך להראות $(g,h)(a,b)=(a,b)(g,h)$:

$$(g,h)(a,b)=(ga,hb)\underset{*}{=}(ag,bh)=(a,b)(g,h)$$

כאשר מעבר $*$ נובע מהנתון ששתי החבורות אבליות.

2. האם החבורה $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ היא ציקלית?
כדי שהיא תהיה ציקלית, צריך למצוא איבר שיוצר את החבורה, וזהו איבר שהסדר שלו הוא גודל החבורה. אצלנו, נצטרך לראות אם יש איבר $g\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$ כך ש־ $o(g)=6$.

$$(1,1)+(1,1)=(2\equiv 0(\mod 2),2)$$

$$(0,2)+(1,1)=(1,3\equiv 0(\mod 3))$$

$$(1,0)+(1,1)=(2,1)\equiv(0,1)$$

$$(0,1)+(1,1)=(1,2)$$

$$(1,2)+(1,1)=(2,3)\equiv(0,0)$$

ולכן $o\left((1,1)\right)=6$ ולכן $\langle(1,1)\rangle=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3$

3. הוכיחו או הפריכו: אם G,H ציקליות, אז המכפלה $G\times H$ גם ציקלית.
פתרון: פתרון לא נכון: כן: יש $g\in G$ כך ש־ $\langle g\rangle=G$ וכמו"כ יש $h\in H$ כך ש־ $\langle h\rangle=H$. נראה ש־ $\langle(g,h)\rangle=G\times H$. יהי $(a,b)\in G\times H$, רוצים למצוא k כך ש־ $(g,h)^k=(a,b)$. לא תמיד ניתן למצוא חזקה מתאימה.
הפרכה: לכל $n>2$ נראה שהמכפלה $\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ לא ציקלית. הוכחה: נראה שהסדר של כל איבר קטן מn^2. יהי $(a,b)\in\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_n$ אזי:

$$(a,b)^n=\underbrace{(a,b)+(a,b)+\cdots+(a,b)}_{n\text{ times}}=(a^n,b^n)=(n\cdot a,n\cdot b)\equiv(0,0)$$

מסקנה:

$$o\left((a,b)\right)\leq n<n^2$$

ולכן אין איבר מסדר n^2ולכן החבורה לא ציקלית.

2 מחלקות ימניות ושמאליות

נבחן מקרים בהם יש חבורה, ומחלקה שמאלית שווה למחלקה ימנית.

1. תהי G חבורה אבלית. ותהי $H\leq G$ תת־חבורה. הוכיחו לכל $g\in G$ מתקיים:

$$gH=Hg$$

כלומר, המחלקה הימנית שווה לשמאלית.
פתרון: ניזכר ש־ $gH=\{gh:h\in H\},Hg=\{hg:h\in H\}$. כעת:

$$gH=\{gh:h\in H\}\underset{*}{=}\{hg:h\in H\}=Hg$$

כאשר מעבר $*$ נובע מאבליות של החבורה G.

2. האם תמיד יש שיוויון? לא! לדוג': ניקח את $H=\langle(1,2)\rangle\leq S_3$, אזי:

$$(1,2,3)H=\{(1,2,3)id=(1,2,3),(1,2,3)(1,2)=(1,3)\}$$

$$H(1,2,3)=\{id(1,2,3)=(1,2,3),(1,2)(1,2,3)=(2,3)\}$$

קיבלנו שהמחלקה הימנית והשמאלית, עם אותו איבר, שונות.