פתרון מבחן מועד א' – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 10/02/16

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 20 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(x))\cdot x\cdot(\ln(1+x))^2}{(1-\cos(x))^2\sin(e^x)}$

פתרון:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(x))\cdot x\cdot(\ln(1+x))^2}{(1-\cos(x))^2\sin(e^x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(x))}{\sin(x)}\cdot\frac{\sin(x)}{x}\cdot\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{x^2}{1-\cos(x)}\right)^2\cdot\frac{1}{\sin(e^x)}=1\cdot1\cdot1^2\cdot2^2\cdot\frac{1}{\sin(1)}=\frac{4}{\sin(1)}$$

ב. $\lim_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{\ln(x)}}$

פתרון:

$$\lim_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{\ln(x)}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln\left(x^{\frac{1}{\ln(x)}}\right)}=\lim_{x\to 0^+}e^{\left(\frac{\ln(x)}{\ln(x)}\right)}=\lim_{x\to 0^+}e^1=e$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n^2-n}}{3^{10n+5}}$

פתרון:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n^2-n}}{3^{10n+5}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n-1}}{3^{10+\frac{5}{n}}}\right)^n\overset{\infty^\infty}{=}\infty$$

מספר פתרונות אחרים התקבלו כמו מבחן המנה (משפט ארבעת הסעיפים) או שימוש בשיטת $e^{\ln}$.

.2

א. חשבו את $\int x^2\ln(x^2+x+1)dx$

פתרון:

ראשית נבצעת אינטגרציה בחלקים כאשר

$$f'=x^2 \quad g=\ln(x^2+x+1)$$
$$f=\frac{x^3}{3} \quad g'=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

כעת קיבלנו כי

$$\int x^2\ln(x^2+x+1)dx=\frac{x^3}{3}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{3}\int\frac{2x^4+x^3}{x^2+x+1}dx$$

נותר לנו חישוב של אינטגרל על פונקציה רציונאלית – כלומר פולינום חלקי פולינום.

ראשית נבצע חילוק פולינומים ונגלה כי $\frac{2x^4+x^3}{x^2+x+1}=2x^2-x-1+\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

כאשר המונה בשבר הוא בדיוק נגזרת המכנה.

לכן סה"כ האינטגרל המקורי שווה ל:

$$\int x^2\ln(x^2+x+1)dx=\frac{x^3}{3}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{3}\left(\int(2x^2-x-1)dx+\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx\right)=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-x+\ln\left|x^2+x+1\right|\right)+C$$

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_2^\infty\frac{1}{x\ln^2(x)}dx$, ואם כן חשבו אותו.

פתרון:

ראשית נמצא את הפונקציה הקדומה:

$$\int\frac{1}{x\ln^2(x)}dx=\left\{\begin{matrix}t=\ln x\\ dt=\frac{1}{x}dx\end{matrix}\right\}=\int\frac{1}{t^2}dt=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{\ln(x)}+C$$

לכן

$$\int_2^\infty\frac{1}{x\ln^2(x)}dx=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln(t)}+\frac{1}{\ln(2)}\right)=\frac{1}{\ln(2)}$$

3. (אין קשר בין הסעיפים)

א. תהי $f(x)$ גזירה ב $[0,\infty)$. הוכיחו שלכל $0<x$ קיימת נקודה $0<c<x$ עבורה $f(x)=f(c)+c\cdot f'(c)$ (רמז: הביטו בפונקציה $x\cdot f(x)$).

פתרון:

נביט בפונקציה $h(x)=x\cdot f(x)$ זו פונקציה גזירה ב $[0,\infty)$ כמכפלה של פונקציות גזירה.

תהי נקודה $0<x$. אזי h רציפה ב $[0,x]$ (כי היא גזירה שם ולכן רציפה) וגזירה ב $(0,x)$.

לכן מותר להפעיל משפט לגראנז' על הפונקציה h בקטע $(0,x)$.

לכן קיימת נקודה $0<c<x$ עבורה:

$$h'(c)=\frac{h(x)-\mathrm{h}(0)}{x-0}$$

אבל $h'(\mathrm{c})=f(c)+c\cdot f'(c)$ וכמו כן $\frac{h(x)-\mathrm{h}(0)}{x-0}=\frac{xf(x)-0\cdot f(0)}{x}=f(x)$

ולכן קיבלנו $f(x)=f(c)+c\cdot f'(c)$

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x=\ln(x)+1$, והוכיחו תשובתכם.

פתרון:

ראשית נעביר אגף ונביט בפונקציה $h(x)=x-\ln(x)-1$.

נגזור את הפונקציה ונקבל $h'(x)=1-\frac{1}{x}$.

הנגזרת מתאפסת כאשר $x=1$.

קל לראות (באמצעות טבלה, או ישירות) כי בקטע $(0,1)$ הנגזרת שלילית ולכן הפונקציה יורדת ובקטע $(1,\infty)$ הנגזרת חיובית ולכן הפונקציה עולה.

נשים לב כי $h(1)=0$.

כיוון שהפונקציה יורדת בקטע $(0,1)$ ומתקיים $h(1)=0$ אזי לכל $x\in(0,1)$ מתקיים כי $h(x)>0$.

באופן דומה, כיוון שהפונקציה עולה בקטע $(1,\infty)$ ומתקיים $h(1)=0$ אזי לכל $x\in(0,1)$ מתקיים כי $h(x)>0$.

סה"כ בקטע $(0,\infty)$ מתקיים כי $h(x)=0$ אך ורק בנקודה $x=1$.

מחוץ לקטע זה $\ln(x)$ אינה מוגדרת ולכן אין פתרון למשוואה.

לכן סה"כ למשוואה יש פתרון יחיד, כאשר $x=1$.

4. תהי f פונקציה רציפה בכל הממשיים כך ש $f(1)=f(-1)$.

א. הוכיחו כי קיימת נקודה c עבורה $f(c)=f(c+1)$.

פתרון:

ראשית נעביר אגף ונביט בפונקציה $h(x)=f(x)-f(x+1)$. פונקציה זו רציפה בכל הממשיים כסכום של פונקציות רציפות בכל הממשיים.

כעת

$$h(0)=f(0)-f(1)$$

$$h(-1)=f(-1)-f(0)=f(1)-f(0)$$

נשים לב כי $h(0)=-h(-1)$.

אם שניהם אפס, מצאנו נקודות בהן h מתאפסת ולכן מצאנו פתרונות למשוואה.

אם שניהם שונים מאפס, מצאנו נקודות בהן h מחליפה סימן ולפי משפט ערך הביניים בקטע $[-1,0]$ קיימת נקודה c עבורה $h(c)=0$.

ב. נניח בנוסף כי f גזירה בכל הממשיים, וכי הנגזרת שלה מתאפסת בדיוק פעם אחת.

הוכיחו שנקודה c המקיימת את המשוואה בסעיף א' חייבת לקיים $-2<c<1$.

פתרון:

כיוון שהפונקציה גזירה, מותר לנו להפעיל את משפט רול בכל קטע מתאים.

בקטע $[-1,1]$ מתקיים כי $f(-1)=f(1)$ ולכן לפי משפט רול קיימת נקודה $-1<d<1$ עבורה $f'(d)=0$

(טעות נפוצה: במקום d להשתמש בפרמטר הנתון c ובעצם להמציא נתון נוסף $f'(c)=0$.)

כמו כן, בקטע $[c,c+1]$ מתקיים כי $f(c)=f(c+1)$ ולכן לפי משפט רול קיימת נקודה $c<t<c+1$ עבורה $f'(t)=0$.

כיוון שנתון שהנגזרת מתאפסת רק פעם אחת, נובע כי $d=t$.

לכן מתקיים כי

$$-1<d<1$$
$$c<d<c+1$$

ולכן ביחד ניתן להסיק כי

$$-1<d<c+1$$
$$c<d<1$$

וסה"כ עם העברת אגף נקבל כי $-2<c<1$

5. תהי סדרה a_n כך ש $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}=\infty$ ולכל n מתקיים $a_n^2+a_{n+1}^2\le 1$.

א. הוכיחו כי a_n מונוטונית החל ממקום מסוים.

פתרון:

מהגדרת הגבול, לכל $M>0$ קיים מקום בסדרה N_M כך שלכל $n>N_M$ מתקיים כי $\frac{1}{a_{n+1}-a_n}>M$.

בפרט עבור $M=1$ קיים N_1 כך שלכל $n>N_1$ מתקיים כי $\frac{1}{a_{n+1}-a_n}>1$ ולכן בפרט $\frac{1}{a_{n+1}-a_n}>0$ ולכן $a_{n+1}-a_n>0$ ולכן $a_{n+1}>a_n$.

כלומר לכל $n>N_1$ הסדרה מונוטונית עולה כפי שרצינו.

ב. הוכיחו כי a_n מתכנסת.

פתרון:

לכל n מתקיים $a_n^2\le a_n^2+a_{n+1}^2\le 1$ ולכן $a_n^2\le 1$ ולכן $-1\le a_n\le 1$.

כלומר הוכחנו כי הסדרה חסומה.

יחד עם סעיף א', הסדרה מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה $\mathrm{a}_n=\frac{e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{n}{n}}}{n}$

פתרון:

קל לראות כי a_n הינו סכום רימן של הפונקציה e^x בקטע $[0,1]$ עם החלוקה $\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,1\right\}$ ובחירת הנקודות שהן קצוות הקטע הימניים.

כיוון שפרמטר החלוקה הוא $\frac{1}{n}$, והפונקציה e^x אינטגרבילית (רציפה וחסומה בקטע), נובע כי סכומי הרימן שואפים לאינטגרל המסויים כאשר פרמטר החלוקה שואף לאפס ולכן

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\int_0^1 e^x dx=e-1$$

ב. חשבו את $\sqrt{2}$ עד רמת דיוק של $h = 0.05$

פתרון:

נפתח את הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ סביב הנקודה המצוייה $a = 1$ כאשר הנקודה הרצוייה היא $x = 2$ לפולינום טיילור.

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{15}{16} x^{-\frac{7}{2}}$$

עבור $n = 3$ קיימת נקודה $1 < c < 2$ כך שהשגיאה היא

$$\left|R_3(f,1,2)\right| = \left|\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(2-1)^4\right| = \left|\frac{15}{384c^{\frac{7}{2}}}\right|$$

אם נקטין את המכנה נגדיל את הביטוי ולכן

$$\left|R_3(f,1,2)\right| < \frac{15}{384} < 0.05$$

ולכן הקירוב הינו:

$$\sqrt{2} \approx f(1) + f'(1)(2-1) + \frac{f''(1)}{2}(2-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(2-1)^3 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{3}{48} = 1.4375$$