

תרגיל 12 בפונקציות מרוכבות

1. הראו כי

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 \theta} d\theta = \sqrt{2}\pi$$

רמז: לעניות דעתי יהיה יותר קל לפשט קצת את האינטגרל לפני שעוברים לאינטגרל מרוכב.
פתרון:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \frac{1 - \cos 2\theta}{2}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3 - \cos 2\theta} d\theta$$

נציב $t = 2\theta$ ולכן $dt = 2d\theta$

$$\int_0^{2\pi} \frac{2}{3 - \cos 2\theta} d\theta = \int_0^{4\pi} \frac{1}{3 - \cos t} dt$$

קל לראות ש

$$\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{1}{3 - \cos t} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - \cos t} dt$$

(מי שמתעקש יכול להוכיח זאת ע"י הצבה של $\varphi = t - 2\pi$ ולכן

$$\int_0^{4\pi} \frac{1}{3 - \cos t} dt = 2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{3 - \cos t} dt$$

עכשיו נבצע הצבה מרוכבת

$$z = e^{it}$$

$$dz = ie^{it} dt = iz dt$$

$$\cos t = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \frac{2}{3 - \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)} \frac{1}{iz} dz &= \int_{|z|=1} \frac{4}{6 - z - \bar{z}} \frac{1}{iz} dz = 4i \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 - 6z + 1} dz \\ &= 4i \int_{|z|=1} \frac{1}{(z - (3 - \sqrt{8}))(z - (3 + \sqrt{8}))} dz \end{aligned}$$

נשים לב ש $3 - \sqrt{8}$ היא סינגולריות בתוך התחום ו $3 + \sqrt{8}$ מחוצה לו. קל לראות ש

$$\text{Res}\left(\frac{1}{(z - (3 - \sqrt{8}))(z - (3 + \sqrt{8}))}, 3 - \sqrt{8}\right) = \frac{1}{3 - \sqrt{8} - 3 - \sqrt{8}} = -\frac{1}{2\sqrt{8}}$$

ולכן לפי משפט השאריות

$$4i \int_{|z|=1} \frac{1}{(z - (3 - \sqrt{8}))(z - (3 + \sqrt{8}))} dz = 2\pi i \cdot 4i \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{8}}\right) = \sqrt{2}\pi$$

כנדרש.

2. חשבו את

פתרון: בכל השאלה הזאת נסמן $\Gamma_R = \{z \mid z \in \mathbb{R} \quad -R \leq z \leq R\} \cup \{z \mid |z| = 1, \text{Im}(z) \geq 0\}$
 $\Delta_R = \{z \mid |z| = 1, \text{Im}(z) < 0\}$
 $f(z)$ לכן ברור שלכל פונקציה

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{\Delta_R} f(z) dz + \int_{-R}^R f(z) dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 - 2x + 5)^2} dx \quad (\text{א})$$

פתרון: ראשית נשים לב שהאינטגרל קיים (לפי השוואה עם $\frac{1}{x^2}$) ולכן מספיק לחשב את

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{(x^2 - 2x + 5)^2} dx$$

נגדיר

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 2z + 5)^2} = \frac{1}{(z - (1 + 2i))^2(z - (1 - 2i))^2}$$

לכן אם R מספיק גדול (נניח $R > 5$) אז כל הסינגולריות שיש לפונקציה בחצי המישור העליון (במקרה הזה, $1 + 2i$) נמצאים כבר בתוך Γ_R ולכן לפי משפט השאריות

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{(z - (1 + 2i))^2(z - (1 - 2i))^2} dz = 2\pi i \text{Res}(f(z), 1 + 2i)$$

כמובן ש $1 + 2i$ הוא קוטב מסדר 2 ולכן אם נסמן

$$g(z) = \frac{1}{(z - (1 - 2i))^2}$$

השארית היא

$$\text{Res}(f(z), 1+2i) = \lim_{z \rightarrow 1+2i} g'(z) = \lim_{z \rightarrow 1+2i} \frac{-2}{(z - (1 - 2i))^3} = \frac{-2}{-64i} = -\frac{i}{32}$$

ולכן

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \frac{-i}{32} = \frac{\pi}{16}$$

לכל $R > 5$. כעת נעבור לאינטגרל

$$\int_{\Delta_R} f(z) dz = \int_{\Delta_R} \frac{1}{(z^2 - 2z + 5)^2} dz$$

נוכיח שכאשר $R \rightarrow \infty$ האינטגרל שואף ל-0. נתחיל ממה שהוא די ברור, ש $f(z)$ מתנהג בערך כמו $\frac{1}{R^4}$ וליתר דיוק: נשים לב ש

$$|z^2 - 2z + 5| \geq ||z|^2 - |-2z + 5|| = |R^2 - |-2z + 5||$$

אבל

$$|-2z + 5| \leq 2|z| + 5 = 2R + 5$$

ולכן עבור ערכי R גדולים

$$R^2 \geq 2R + 5 \geq |-2z + 5|$$

נקבל ש

$$|z^2 - 2z + 5| \geq |R^2 - |-2z + 5|| = R^2 - |-2z + 5| \geq R^2 - 2R - 5$$

ולכן עבור ערכי R גדולים (שבהם בפרט $R^2 - 2R - 5$ חיובי)

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{(z^2 - 2z + 5)^2} \right| \leq \frac{1}{(R^2 - 2R - 5)^2}$$

נזכור שהאורך של Δ_R הוא πR ולכן לפי משפט על חסם ML מתקיים ש

$$\left| \int_{\Delta_R} \frac{1}{(z^2 - 2z + 5)^2} dz \right| \leq \frac{\pi R}{(R^2 - 2R - 5)^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

ולכן אם נזור לשוייון

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{\Delta_R} f(z) dz + \int_{-R}^R f(z) dz$$

ונפעיל $\lim_{R \rightarrow \infty}$ נקבל ש

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(z) dz = \frac{\pi}{16}$$

ולכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 - 2x + 5)^2} dx = \frac{\pi}{16}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 2} dx \quad (\text{ב})$$

פתרון: נשתמש בטכניקה דומה לסעיף א'. ראשית נשים לב שהאינטגרל קיים (נניח, לפי מבחן דירכלה כי קל לבדוק ש $\frac{x}{x^2 - 2x + 2}$ מונוטונית יורדת ומתכנסת ל 0) ולכן מספיק לחשב את

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 2} dx$$

נגדיר

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 2}$$

ואז עבור $z \in \mathbb{R}$ מתקיים ש

$$\frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 2} = \operatorname{Re} f(z)$$

כלומר

$$\int_{-R}^R \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 2} dx = \int_{-R}^R \operatorname{Re} f(z) dz = \operatorname{Re} \int_{-R}^R f(z) dz$$

(השייון האחרון נכון כי האינטגרל על תחום ממשי) כלומר הערך המבוקש הוא

$$\operatorname{Re} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 2} dz$$

את זה נחשב בטכניקה דומה לסעיף א'. ראשית נשים לב ש

$$z^2 - 2z + 2 = (z - (1 + i))(z - (1 - i))$$

ולכן עבור ערכי R גדולים (כך ש $1+i$ נמצא בתוך Γ_R) אנחנו יודעים לפי משפט השאריות ש

$$\int_{\Gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 2} dz = \int_{\Gamma_R} \frac{ze^{iz}}{(z - (1+i))(z - (1-i))} dz = 2\pi i \frac{(1+i)e^{i-1}}{2i} = \pi(1+i)e^{i-1}$$

כעת לפי משפט ז'ורדן

$$\left| \int_{\Delta_R} \frac{ze^{iz}}{z^2 - 2z + 2} dz \right| \leq \pi \max_{z \in \Delta_R} \frac{z}{z^2 - 2z + 2}$$

וכמו קודם בגלל ש $\left| \frac{z}{z^2 - 2z + 2} \right|$ הוא בערך $\frac{1}{R}$ נקבל שכאשר R שואף ל ∞ גם האינטגרל שלנו שואף ל 0. ולכן

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 2} dx &= \operatorname{Re} \pi(1+i)e^{i-1} = \frac{\pi}{e} \operatorname{Re}((1+i)e^i) \\ &= \frac{\pi}{e} (\cos 1 - \sin 1) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2} dx \quad (ג)$$

פתרון: ראשית נשים לב שהפונקציה המדוברת זוגית ולכן

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \cos 2x}{(1+x^2)^2} dx$$

והאינטגרל בבירור מתכנס ולכן נחשב את

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1 + \cos 2x}{(1+x^2)^2} dx$$

בשיטה הרגילה

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz = \int_{\Gamma_R} \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} dz$$

אם נסמן

$$g(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$$

אז נקבל

$$g'(z) = \frac{-2}{(z+i)^3}$$

ולכן

$$\int_{\Gamma_R} \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} dz = 2\pi i g'(i) = 2\pi i \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-4\pi i}{-8i} = \frac{\pi}{2}$$

שוב קל לוודא ש

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Delta_R} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz = 0$$

ולכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

בעוד שאת

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(1+x^2)^2} dx$$

נחשב עם הפונקציה

$$f(z) = \frac{e^{2iz}}{(1+z^2)^2} = \frac{e^{2iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}$$

כרגיל נגדיר

$$g(z) = \frac{e^{2iz}}{(z+i)^2}$$

ואז

$$g'(z) = \frac{2ie^{2iz}(z+i)^2 - 2(z+i)e^{2iz}}{(z+i)^4}$$

ולכן

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{2iz}}{(z-i)^2(z+i)^2} dz = 2\pi i g'(i) = 2\pi i \frac{2ie^{-2}(-4) - 4ie^{-2}}{16} = e^{-2} \frac{16\pi + 8\pi}{16} = \frac{3\pi}{2e^2}$$

כמו כן אם $|z| = R$ אז עבור ערכי R מספיק גדולים

$$|z^2 + 1| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1$$

ולכן

$$\left| \frac{1}{(z^2 + 1)^2} \right| \leq \frac{1}{(R^2 - 1)^2}$$

ואז לפי הלמה של ז'ורדן מתקיים ש

$$\left| \int_{\Delta_R} \frac{e^{2iz}}{(z^2 + 1)^2} dz \right| \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{(R^2 - 1)^2}$$

ולכן זה מתכנס ל 0 כאשר R שואף לאינסוף. לסיכום

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{2iz}}{(z^2 + 1)^2} dz = \frac{3\pi}{2e^2}$$

1

$$\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2e^2} \right) = \frac{\pi}{8} \left(1 + \frac{3}{e^2} \right)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5 - 4 \cos 2\theta} d\theta \quad (\text{ד})$$

פתרון: לפי הזהות $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ נקבל ש

$$\frac{\cos^2 3\theta}{5 - 4 \cos 2\theta} = \frac{1}{2} \frac{1 + \cos 6\theta}{5 - 4 \cos 2\theta}$$

ולכן האינטגרל שלנו הוא

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 6\theta}{5 - 4 \cos 2\theta} d\theta$$

נבצע הצבה

$$t = 2\theta$$

$$dt = 2d\theta$$

ונקבל

$$\frac{1}{4} \int_0^{4\pi} \frac{1 + \cos 3t}{5 - 4 \cos t} dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 3t}{5 - 4 \cos t} dt + \frac{1}{4} \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{1 + \cos 3t}{5 - 4 \cos t} dt$$

אבל נשים לב שאם מציבים

$$s = t + 2\pi$$

מקבלים ש

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 3t}{5 - 4 \cos t} dt = \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{1 + \cos(3s - 6\pi)}{5 - 4 \cos(s - 2\pi)} ds = \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{1 + \cos(3s)}{5 - 4 \cos(s)} ds$$

ולכן

$$\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 3t}{5 - 4 \cos t} dt + \frac{1}{4} \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{1 + \cos 3t}{5 - 4 \cos t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 3t}{5 - 4 \cos t} dt$$

עכשיו נבצע את ההצבה המרוכבת הטריגונוטרית

$$z = e^{it}$$

$$dz = iz dt$$

$$\cos t = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

$$\cos 3t = \frac{z^3 + \frac{1}{z^3}}{2}$$

וקיבלנו את האינטגרל

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{|z|=1} \frac{1 + \frac{z^3 + \frac{1}{z^3}}{2}}{5 - 2(z + \frac{1}{z})} \frac{dz}{iz} &= \frac{1}{4i} \int_{|z|=1} \frac{z^3 + 2 + \frac{1}{z^3}}{5 - 2(z + \frac{1}{z})} \frac{dz}{z} = \frac{i}{4} \int_{|z|=1} \frac{z^3 + 2 + \frac{1}{z^3}}{2z^2 - 5z + 2} \frac{dz}{z} \\ &= \frac{i}{4} \int_{|z|=1} \frac{z^6 + 2z^3 + 1}{(2z^2 - 5z + 2)z^3} dz \end{aligned}$$

זה הזמן לחפש את הסינגולריות של הפונקציה שלנו. ברור שיש סינגולריות ב $z = 0$ כמו כן יש סינגולריות ב

$$2z^2 - 5z + 2 = 0$$

שזה בעצם הנקודות

$$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \frac{1}{2}, 2$$

הנקודה 2 נמצאת מחוץ למעגל ולכן היא לא משנה לנו. אבל $\frac{1}{2}$ היא סינגולריות שצריך להתחשב בה.

נשתמש במשפט השאריות. ברור ש $\frac{1}{2}$ היא קוטב מסדר 1 (היא לא מאפסת את המונה). ולכן

$$\text{Res}\left(\frac{z^6 + 2z^3 + 1}{2(z - \frac{1}{2})(z - 2)z^3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{(\frac{1}{2})^6 + 2(\frac{1}{2})^3 + 1}{2(\frac{1}{2} - 2)(\frac{1}{2})^3} = \frac{\frac{1}{64} + \frac{1}{4} + 1}{-\frac{3}{8}} = -\frac{81}{24} = -\frac{27}{8}$$

נרצה לחשב גם שארית ב $z = 0$. נשים לב ש

$$\frac{z^6 + 2z^3}{(2z^2 - 5z + 2)z^3}$$

היא פונקציה אנליטית בסביבת 0 (או ליתר דיוק, הסינגולריות ב $z = 0$ היא סליקה) ולכן

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^6 + 2z^3 + 1}{(2z^2 - 5z + 2)z^3}, 0\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(2z^2 - 5z + 2)z^3}, 0\right) = \frac{g''(0)}{2}$$

כאשר

$$g(z) = \frac{1}{2z^2 - 5z + 2}$$

היות ש

$$g'(z) = -\frac{4z - 5}{(2z^2 - 5z + 2)^2}$$

$$g''(z) = -\frac{4(2z^2 - 5z + 2)^2 - 2(2z^2 - 5z + 2)(4z - 5)^2}{(2z^2 - 5z + 2)^4}$$

ולכן

$$g''(0) = -\frac{16 - 4 \cdot 25}{16} = -\frac{84}{16} = \frac{21}{4}$$

כלומר

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(2z^2 - 5z + 2)z^3}, 0\right) = \frac{21}{8}$$

ולכן לפי משפט השאריות

$$\frac{i}{4} \int_{|z|=1} \frac{z^6 + 2z^3 + 1}{(2z^2 - 5z + 2)z^3} dz = \frac{i}{4} 2\pi i \left(\frac{21}{8} - \frac{27}{8}\right) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{6}{8}\right) = \frac{3\pi}{8}$$

זוה האינטגרל המבוקש