# <u>תרגיל כיתה 8 – הפרדת משתנים ומשוואות הומוגניות</u>

*מתרגל: אדם צ'פמן*

## משוואות מסדר ראשון:

משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון הן משוואות שבהם מופיעים ביטויים הכוללים $x$, $y$ ו $y'$. לדוגמא $xy'+y-y^2=12$.

ישנן מספר שיטות שונות לפתרון משוואות כאלה, והן תלויות בצורה של המשוואה עצמה.

## שיטת הפרדת המשתנים:

אם אפשר להביא משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון לצורה $f(y)y'=g(x)$ כאשר $f(y)$ הוא ביטוי של $y$ בלבד ו $g(x)$ הוא ביטוי של $x$ בלבד, אז מתקיים

$f(y)dy=g(x)dx$ [בגלל ש $y'=\frac{dy}{dx}$] ואז $\int f(y)dy=\int g(x)dx$. כל שנותר אם כן הוא לפתור את האינטגרל.

*דוגמאות:*

- $y'=x$.

מקבלים ש $dy=xdx$ ואז אם מפעילים את האינטגרל מקבלים $y=\frac{x^2}{2}+c$ כאשר $c$ הוא קבוע כלשהו.

- $y'=y$.

מקבלים ש $\frac{1}{y}dy = dx$ ואז $\ln(y) = x + c$ ולכן $y = e^{x+c} = De^x$ כאשר $D = e^c$

הוא קבוע כלשהו.

- $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$.

מקבלים $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$ ואז $\arctan(y) = \arctan(x) + c$ ולכן

$y = \tan(\arctan(x) + c)$. אם משתמשים בנוסחה

$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$ אז מקבלים ש $y = \frac{x+D}{1-Dx}$ כאשר $D = \tan(c)$

הוא קבוע כלשהו.

## משוואות עם פונקציות הומוגניות:

פונקצייה בשני משתנים $f(x,y)$ נקראת הומוגנית אם $f(ax,ay) = f(x,y)$ לכל $a$,

למשל $f(x,y) = \frac{x}{y}$, $f(x,y) = \frac{y - \sqrt{y^2 - 3x^2}}{\sqrt{xy}}$ וכדומה.

אם המשוואה הדיפרנציאלית היא $y' = f(x,y)$ ו $f(x,y)$ היא הומוגנית אז מה שעושים הוא כך:

1. מציבים $t = \frac{y}{x}$, ואז $y' = t + xt'$. הפונקצייה $f(x,y)$ הופכת להיות פונקצייה התלוייה ב $t$ בלבד $g(t)$.
2. המשוואה הדיפרנציאלית הפכה להיות אם כן $t + xt' = g(t)$. מעבירים את $t$ לאגף ימין כדי לקבל $xt' = g(t) - t$.

3. מחלקים ב $x$ וב $g(t)-t$ ומקבלים $(g(t)-t)^{-1}t'=\frac{1}{x}$. קיבלנו הפרדת משתנים.

4. ממשיכים כפי שראינו מקודם.

*דוגמאות:*

- $xy'=x+y$.

מחלקים את המשוואה ב $x$ ומקבלים $y'=\frac{x+y}{x}$.

מציבים $t=\frac{y}{x}$ ומקבלים $xt'+t=\frac{x+xt}{x}=t+1$, ולכן $xt'=1$, משמע $t'=\frac{1}{x}$.

האינטגרל של זה הוא $t=\ln(x)+c$. מציבים $t=\frac{y}{x}$ בפיתרון הזה ומקבלים ש

$y=x(\ln(x)+c)$ הוא הפיתרון הכללי למשוואה הדיפרנציאלית הנ"ל.

- $y'=\frac{y+\sqrt{y^2-x^2}}{x}$.

מציבים $t=\frac{y}{x}$ ומקבלים $xt'+t=t+\sqrt{t^2-1}$, ולכן $xt'=\sqrt{t^2-1}$, משמע

$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$. האינטגרל יוצא [האינטגרל של צד שמאל הוא מסובך, וככל הנראה לא תתבקשו לחשב אותו בעצמכם. אם תהיה שאלה שתזדקקו לו אז הנוסחה תופיע]

$\ln(2(\sqrt{t^2-1}+t))=\ln(x)+c$ ואז $2(\sqrt{t^2-1}+t)=Dx$ לאיזשהו קבוע $D$.

נציב חזרה $t=\frac{y}{x}$ במשוואה זו ונקבל $2(\sqrt{y^2-x^2}+y)=Dx^2$.