

מתמטיקה בדידה 88-195 תשע"ד

שיעורי בית מספר 4

מתרגלים: רועי בן-ארי ולידור אלדב

1. לכל אחד מהיחסים R הבאים, קבעו (לכל תכונה בנפרד) האם רפלקסיבי, סימטרי או טרנזיטיבי. אם זה יחס שקילות, ציינו מה הן מחלקות השקילות.
 - א) $(a, b) \in R \subseteq \mathbb{Z}^2$ אם $(a \equiv b \pmod{2}) \vee (a \equiv b \pmod{3})$.
 - ב) $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in R \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ אם $x_1 = x_2$.
 - ג) $(a, b) \in R \subseteq \mathbb{Z}^2$ אם a מחלק את b .
 - ד) $(a, b) \in R \subseteq \mathbb{Z}^2$ אם $a + b$ זוגי.
 - ה) $(a, b) \in R \subseteq \mathbb{Z}^2$ אם $a + b$ אי-זוגי.
 - ו) $(a, b) \in R \subseteq \mathbb{Z}^2$ אם $a \leq b$.
 - ז) $(a, b) \in R \subseteq \mathbb{Z}^2$ אם $a^2 = b^2$.
 - ח) $(a, b) \in R \subseteq \mathbb{Z}^2$ אם $a < b$.
2. הוכיחו: חיתוך של משפחה לא ריקה של יחסי שקילות $\{R_i\}_{i \in I}$ על אותה קבוצה A , הוא יחס שקילות על A .
3. כמה יחסי שקילות אפשר להגדיר על הקבוצה $A = \{1, 2, 3\}$?
4. A קבוצה בעלת מספר סופי של איברים, ו- $R \subseteq A \times A$ יחס שקילות על A . הוכיחו: $|A|$ אי-זוגי אם ורק אם $|R|$ אי-זוגי.
5. **שאלת בונוס:** קראו את העמודים המצורפים מהספר "מבוא לתורת הקבוצות" של שמרון אברהם וענו על השאלות הבאות:

א) הוכיחו וספקו דוגמה של הכלה ממש $\overline{\lim}(X_n \setminus Y_n) \subseteq \overline{\lim}X_n \setminus \underline{\lim}Y_n$

ב) מצאו $\overline{\lim}A_n$ ו- $\underline{\lim}A_n$ עבור הסדרה

$$A_n = \begin{cases} \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right), & 2 \mid n \\ \left[\frac{1}{n}, n\right), & 2 \nmid n \end{cases}$$

$$.X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z) \quad (\text{א.}) \quad (.5)$$

$$.X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z) \quad (\text{ב.})$$

$$.X \times (Y - Z) = (X \times Y) - (X \times Z) \quad (\text{ג.})$$

*סדרות של קבוצות

1.14 הגדרה: בהנתן סדרת הקבוצות $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, הגביל העליון של הסדרה הנה קבוצת

כל האיברים x השייכים ל- X עבור אינסוף מהאינדקסים n . הגבול העליון של $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ מסומן ב- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n$. הגבול התחתון של הסדרה $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ הנה קבוצת כל

האיברים x השייכים לכל הקבוצות X_n פרט אולי למספר סופי מהן. הגבול התחתון של $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ מסומן ב- $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$.

הערה: מן ההגדרה ברור ש-:

$$x \in \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \quad \text{אם ורק אם לכל } n \in \mathbb{N} \text{ קיים } m \in \mathbb{N} \text{ כך ש-} x \in X_m \quad (.1)$$

$$x \in \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n \quad \text{אם ורק אם קיים } n_0 \in \mathbb{N} \text{ כך ש-} x \in X_n \text{ לכל } n \geq n_0. \quad (.2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n \subset \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n \quad (.3)$$

בטענה הבאה ניתן הצגה מפורשת של $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n$ ו- $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$.

1.15 טענה: תהי סדרה של קבוצות $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$. אזי מתקיים:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{m \geq n} X_m \right) \quad (.1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{m \geq n} X_m \right) \quad (.2)$$

הוכחה: (1) $x \in \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n$ אם ורק אם לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש- $n > m$ ו- $x \in X_m$

אם ורק אם לכל $n \in \mathbb{N}$ $x \in \bigcup_{m \geq n} X_m$ אם ורק אם $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{m \geq n} X_m)$.

(2) $x \in \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n$ אם ורק אם קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $x \in X_n$ לכל $n \geq n_0$ אם ורק

אם קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $x \in \bigcap_{m \geq n_0} X_m$ אם ורק אם $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcap_{m \geq n} X_m)$.

□

דוגמאות: (1) אם $X_n = [0, \frac{n}{n+1}]$ $n = 1, 2, \dots$ אזי $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = [0, 1]$

(2) אם $X_n = \begin{cases} [0, 1] & n \text{ איזוגי,} \\ [-1, 0] & n \text{ זוגי,} \end{cases}$ אזי $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = [-1, 1]$ ו- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = \{0\}$

1.16 הגדרה: (1) אם בהנתן הסדרה $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתקיים $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n$ אזי נאמר

שהסדרה $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ונכתוב $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n$ ונקרא לקבוצה $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ הגבול של הסדרה $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(2) סדרה $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $X_n \subset X_{n+1}$ לכל $n \in \mathbb{N}$ נקראת סדרה עולה

וכאשר $X_n \supset X_{n+1}$ לכל $n \in \mathbb{N}$ הסדרה נקראת יורדת. סדרה שהיא או עולה או יורדת נקראת סדרה מונוטונית.

1.17 טענה: סדרה מונוטונית $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ של קבוצות מתכנסת. אם הסדרה עולה אזי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \quad \text{ואם הסדרה היא יורדת אזי} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

הוכחה: תרגיל.

הקשר בין הפעולה של משלים מחד לבין הפעולות של גבול עליון וגבול תחתון מאידך, מבוטא בטענה הבאה.

1.18 טענה: תהי $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של קבוצות חלקיות של הקבוצה X ותהי Y קבוצה

חלקית של X . אזי:

$$Y - \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (Y - X_n) \quad (.1)$$

$$Y - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (Y - X_n) \quad (.2)$$

$$\text{כפרט מתקיים: } (\lim_{n \rightarrow \infty} X_n)' = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n' \text{ ו- } (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} X_n)' = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n'$$

$$Y - \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = Y - \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m \geq n} X_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} (Y - \bigcap_{m \geq n} X_m) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (Y - X_n)' = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (Y - X_n) \quad (.1) \text{ הוכחה:}$$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} (Y \cap \bigcup_{m \geq n} X_m') = \bigcap_{n=1}^{\infty} (Y \cap \bigcup_{m \geq n} (Y - X_m)) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (Y - X_n)$$

(.2) תרגיל.

□