תרגיל 5 - תיכוניסטים - פתרונות.

תרגיל 1. הקבוצה פתוחה כתמונה הפוכה של קבוצה פתוחה תחת פונקציה רציפה.

תרגיל 2. בסעיף א' הפונקציה אינה רציפה במ"ש מפני שהתחום בו היא מוגדרת חסום והפונקציה אינה חסומה - בסתירה למשפט שאומר שפונקציה רציפה במ"ש על תחום חסום חסומה. בסעיף ב' הפונקציה רציפה במ"ש מפני שהיא רציפה בתחום

$$D = \left\{(x,y)\,|3 \le x^2+y^2 \le 4\right\}$$

שהוא חסום וסגור ולכן קומפקטי. $D_2 \subseteq D$ ואם פונקציה רציפה במ"ש בקבוצה היא גם רציפה במ"ש בכל תת-קבוצה שלה.

תרגיל 3.

1. אם f רציפה ב $\mathbb{R}^2$, אזי לכל $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $\|(a,b)-(x,y)\| < \delta$ אזי $|f(x,y)-f(a,b)| < \varepsilon$. אבל אם $|a-x| < \delta$ אזי $\|(x,y)-(a,y)\| < \delta$ ולכן

$$\|f(x,y)-f(a,y)\| < \varepsilon$$

ולכן $f(a,y)$ רציפה ב x ב (x,y). באותו אופן מראים רציפות ברכיב השני.

2. נביא דוגמה נגדית:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

היא קבועה 0 ולכן רציפה ב $(0,0)$ ביחס לכל רכיב, אבל אינה רציפה ב $(0,0)$.

3. הוכחה: יהי $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. נראה ש f רציפה ב (a,n). יהי $\epsilon > 0$. אזי קיים $\delta_1 > 0$ כך שאם $|x_1-x_2| < \delta_1$ אזי $|f(x_1,y)-f(x_2,y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ לכל $y \in \mathbb{R}$ וכן קיים δ_2 כך שאם $|y_1-y_2| < \delta_2$ אזי $|f(x,y_1)-f(x,y_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$ לכל $x \in \mathbb{R}$ מהנתון של רציפות במ"ש. ניקח $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$. נניח ש $\|(x,y)-(a,b)\| < \delta$. אזי, $|x-a| < \delta$ וגם $|y-b| < \delta$. ולכן מתקיים:

$$\begin{aligned} |f(x,y)-f(a,b)| &< |f(a,b)-f(x,b)| + |f(x,b)-(x,y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

כנדרש. שימו לב - אפשר בלי לשנות את ההוכחה - להוכיח שבמקרה הזה f רציפה במ"ש. כמו כן, על מנת להוכיח רציפות, ניתן להסתפק ברציפות במ"ש באחד מהרכיבים וברציפות רגילה ברכיב השני.

4. נגדיר $a=0$ ונקבל f רציפה ב $(0,0)$ מפני ש

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}=0$$

(קל לראות בפולריות או מפני ש $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ הוא חסום ו x שואף ל 0).

5. בסעיף הראשון הקבוצה אינה קשירה, מפני שהיא חיתוך של קבוצה לא קשירה אם קבוצה קשירה, כך ששני רכיבי קשירות שונים חותחום אותה. הסעיף השני הקבוצה היא קשירה, מפני שהיא חיתוך של קבוצות קמורות, וחיתוך של קבוצות קמורות הוא קמור. קבוצה קמורה היא קשירה מסילתית ולכן קשירה.