Bar-Ilan University
אוניברסיטת בר־אילן

Department of Mathematics

טופולוגיה 88 - 222 05 סמסטר ב' תשפ"א, 13.07.2021 מבחן מועד א'
מרצה: פרופ' מיכאל מגרל
מתרגלים: תמר בר-און, גלעד פורת קורן, מתן קומיסרציק

הנחיות:

- משך הבחינה 3 שעות. אין להשתמש בכל חומר עזר.
- יש **לבחור בדיוק 4 מתוך 5** שאלות. אם עניתם על חמש שאלות ללא בחירה אז נבדוק לפי הסדר שמופיע במחברת.
- **נא לרשום על הדף הראשון את מספר התרגיל שבחרתם לא לפתור ואם פתרתם את שאלת הבונוס.**
- בכל שאלה יש 3 סעיפים. סעיף א שווה 5 נקודות, הסעיפים ב , ג כל אחד שווה 10 נקודות. שאלת הבונוס שווה 5 נקודות. אין קשר בין הסעיפים השונים.
- בעקרון אפשר להגיע בס"ה ל 105 נקודות ☺

השאלות:

1. א. הגדירו: חסימות כליל של מרחב מטרי.
ב. נניח X,Y מרחבים טופולוגיים וקיימת פונקציה רציפה וחד חד ערכית $\psi : X\times Y\to\mathbb{R}$.
הוכיחו שהמרחבים X,Y הם האסדורפיים.
ג. הוכיחו את המשפט: Tube Lemma
נניח X,Y מרחבים טופולוגיים, Y קומפקטי, $a\in X$. אז לכל סביבה פתוחה $\{a\}\times Y\subset N$ (במכפלה $X\times Y$) של הפיסה $\{a\}\times Y$ קיימת קבוצה פתוחה $W\subset X$ מספיק קטנה כך ש $\{a\}\times Y\subset W\times Y\subset N$.

פתרון:

א. קובץ ההרצאות עמוד 99.

ב. קודם כל נעיר ש $X\times Y\in T_2$. זה נובע **מטענת עזר** הבאה:
אם קיימת פונקציה רציפה $f:A\to B$ וחד חד ערכית ממרחב A למרחב $B\in T_2$ אז גם $A\in T_2$.
הסבר: נניח $a_1\neq a_2$ ב A. אז $f(a_1)\neq f(a_2)$ (כי f חח"ע). קיימות סביבות פתוחות $O_1\in N(a_1), O_2\in N(a_2)$ זרות $O_1\cap O_2=\varnothing$ (כי $B\in T_2$). אז $f^{-1}(O_1)\in N(f(a_1)),\ f^{-1}(O_2)\in N(f(a_2))$ (כי $f:A\to B$ רציפה).
ברור $f^{-1}(O_1)\cap f^{-1}(O_2)=\varnothing$.

בגלל הטענה הזאת נקבל כמקרה פרטי ש $X\times Y\in T_2$.
האוסדופיות תכונה טופולוגית תורשתית ולכן מספיק להוכיח
שהמרחבים X,Y משוכנים טופולוגית לתוך $X\times Y$.

הסבר:
נבחר באופן שרירותי $y_0\in Y$. אז הפונקציה $i(x)=(x,y_0)\quad i:X\to X\times Y,$ היא שיכון.
קודם כל הפונקציה היא רציפה:
לכל "מלבן פתוח" $U\times V\in N(x,y_0)$ כסביבה בסיסית של הנקודה (x,y_0) במכפלה טופולוגית $X\times Y$ המקור $i^{-1}(U\times V)=U$ גם פתוח.
מוכיח רציפות $i:X\to X\times Y$ בכל נקודה $x\in X$.
הפונקציה היא חח"ע (כי $x_1\neq x_2\Rightarrow(x_1,y_0)\neq(x_2,y_0)$)
התמונה של הפונקציה היא $i(X)=X\times\{y_0\}$ ופונקצית ההטלה על קואורדינטה ראשונה היא (כמובן רציפה) והופכית לפונקציה רציפה $i:X\to X\times\{y_0\}$.

באופן סימטרי אפשר להוכיח ש $j(y)=(x_0,y)\quad j:Y\to\{x_0\}\times Y,$ שיכון טופולוגי.

הערה: אפשר להוכיח בצורה אחרת (ומאוד קצרה) ש $i:X\to X\times Y, i(x)=(x,y_0)$ שיכון טופולוגי אם נשתמש *במשפט שני על האלכסון* (עמוד 121 ההרצאות) כי זוג של הפונקציות $id:X\to X,\quad h:X\to Y, h(x)=y_0$ מפריד נקודות וקבוצות סגורות.

ג. קובץ ההרצאות עמוד 108.

2. א. הגדירו: תת קבוצה דלילה במרחב טופולוגי.
ב. נניח $f:X\to Y$ פונקציה רציפה בין מרחבים טופולוגיים. הוכיחו ש X הומיואומורפי לגרף $Gr(f):=\{(x,f(x)):x\in X\}\subset X\times Y$ של הפונקציה.
ג. הוכיחו שמרחב בנך l_∞ של סדרות חסומות עם נורמת סופרמום הוא לא בעל מנייה שנייה.

פתרון:
א. קובץ ההרצאות עמוד 45.
ב. נגדיר פונקציה $h(x,f(x))=x\quad h:Gr(f)\to X$. נוכיח שזה הומיאומורפיזם.
רציפות: כצמצום של ההטלה.
חח"ע: אם $(x_1,f(x_1))\neq(x_2,f(x_2))$ אז גם $x_1\neq x_2$.

על: לכל $x \in X$ מתקיים $h(x, f(x)) = x$

רציפות של ההופכי: $h^{-1}(x) = (x, f(x)) \quad h^{-1} : X \to Gr(f)$.

שקול להוכיח רציפות של הפונקציה $h^{-1}(x) = (x, f(x)) \quad h^{-1} : X \to X \times Y$.

אפשר להציג את הפונקציה הזאת כאלכסון של שתי פונקציות רציפות
$f : X \to Y \quad id : X \to X$

ונזכיר שאלכסון של פונקציות רציפות גם פונקציה רציפה.

ג. נניח בשלילה ש l_∞ הוא בעל מנייה שניה. ז"א $l_\infty \in B_2$. אז כל תת מרחב $Y \subseteq l_\infty$ שלו גם בעל מנייה שניה כי B_2 תכונה תורשתית.

כעת מספיק להראות שיש תת מרחב $Y \subseteq l_\infty$ כך ש $Y \notin B_2$.

נגדיר $Y = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \subset l_\infty$ (סדרות בינריות), כמובן עם העוצמה $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

מספיק להוכיח ש $Y = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ הוא דיסקרטי לגבי מטריקת הצמצום שמושרית מ l_∞.

שימו לב שלכל שתי נקודות שונות $a, b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ מתקיים $d_{\sup}(a,b) = \| a - b \|_{\sup} = 1$.

נזכיר: כל בסיס טופולוגי של מרחב דיסקרטי Y הוא מכיל את כל הנקודונים. לכן כל בסיס של Y לא יהיה בן מנייה. סתירה !

3. א. הגדירו רכיב קשירות מסילתי של נקודה במרחב טופולוגי.

ב. נניח X מרחב קומפקטי האוסדורפי, $K \subset X$ תת קבוצה קומפקטית ו $a \in X \setminus K$. הוכיחו שקיימת פונקציה רציפה $f : X \to \mathbb{R}$ כך ש $f(K) = \{2021\}, \quad f(a) = 0$.

ג. במרחב אולטרה-מטרי $(\mathbb{Z}, d_3)$ נגדיר תת קבוצה $A := 81\mathbb{Z} \cup \{2021\}$.

חשבו את: הסגור $cl(A)$, הפנים $\operatorname{int}(A)$ והשפה $\partial(A)$.

תזכורת:

$$d_3(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1}{3^{k(x,y)}}, k(x,y) := \max\{i : 3^i | (x-y)\}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

פתרון:

א. קובץ ההרצאות עמוד 64.

ב. הוכחנו משפט $T_4 \subset T_2 \cap comp$. מצד שני $T_4 \subset T_{3\frac{1}{2}}$

(כי לפי משפט Urysohn $T_4^{funct}=T_4$ וגם ברור $T_4^{funct}\subset T_{3\frac{1}{2}}$).

תת קבוצה קומפקטית $K\subset X$ היא סגורה (כי $X\in T_2$).

לכן בגלל $X\in T_{3\frac{1}{2}}$ יש הפרדה פונקציונלית של $K\subset X$ ושל $a\in X\setminus K$.

לכן קיימת פונקציה

$f_0:X\to[0,1]\quad f_0(a)=0,\ f_0(K)=\{1\}$.

אז עבור פונקציה רציפה $f:=2021f_0$ נקבל

$f:X\to[0,1]\quad f(a)=0,\ f(K)=\{2021\}$.

ג. <u>הסגור</u>

תת קבוצה $81\mathbb{Z}$ במ"מ $(\mathbb{Z},d_3)$ אפשר להציג ככדור סגור $81\mathbb{Z}=B_{\frac{1}{81}}[0]=\{x\in\mathbb{Z}:\ \ 3^4\,|\,x\}$.

הנקודון בכל מ"מ הוא סגור. לכן $\{2021\}$ סגור.

איחוד סופי שומר על סגירות. לכן $A:=81\mathbb{Z}\cup\{2021\}=B_{\frac{1}{81}}[0]\cup\{2021\}$ סגור.

נקבל: $cl(A)=A$.

<u>הפנים</u>

תת קבוצה $81\mathbb{Z}$ במ"מ $(\mathbb{Z},d_3)$ אפשר להציג ככדור פתוח $81\mathbb{Z}=B_{\frac{1}{80}}(0)$.

מכאן נובע שכל נקודה $x\in 81\mathbb{Z}$ היא נקודת פנים של $A:=81\mathbb{Z}\cup\{2021\}$.

זאת אומרת $81\mathbb{Z}\subseteq \text{int}(A)$.

נראה שנקודה 2021 היא לא נקודת פנים של A.

ואז נקבל $81\mathbb{Z}=\text{int}(A)$.

אם נניח בשלילה שנקודה 2021 היא פנימית ב A אז קיים $\varepsilon>0$ כך ש $B_\varepsilon(2021)\subseteq A$.

קיים $k\in\mathbb{N}$ מספיק גדול כך ש $B_{\frac{1}{3^k}}[2021]\subseteq B_\varepsilon(2021)$.

ניקח בחשבון ש $B_{\frac{1}{3^k}}[2021]=B_{\frac{1}{3^k}}[0]+2021=3^k\mathbb{Z}+2021$. אז נקבל

$3^k\mathbb{Z}+2021\subseteq A=81\mathbb{Z}\cup\{2021\}$. אז

$3^k+2021\in 81\mathbb{Z}\cup\{2021\}$. מכאן

$3^k+2021\in 81\mathbb{Z}$. ואז

$2021\in 3^4\mathbb{Z}-3^k$.

אבל זה בלתי אפשרי כי 2021 לא מתחלק ב 3.

<u>השפה</u> : $\partial(A)=cl(A)\setminus\text{int}(A)=\{2021\}$ נקודון.

4. א. הגדירו: מרחב טופולוגי רגולרי לחלוטין.
ב. תהי τ_{cof} טופולוגיה קוסופית על קבוצת ממשיים $\mathbb{R}$. נגדיר פונקציה

$$f:(\mathbb{R},\tau_{cof})\to(\mathbb{R},\tau_{cof}) \quad f(x)=\sin x$$

האם הפונקציה היא: רציפה ? סגורה ? פתוחה ?
ג. הוכיחו את המשפט: "האוניברסליות של קוביות Tychonoff"
התנאים הבאים שקולים:
- $X\in T_{3\frac{1}{2}}$.
- X משוכן לתוך קוביית Tychonoff מסוימת $[0,1]^S$.
- ל X יש קומפקטיפיקציה.

פתרון:
א. קובץ ההרצאות עמוד 40.
ב. נזכיר ש $\tau_{cof}=\{\mathbb{R}\setminus F \mid F \ is \ finite\}\cup\{\varnothing\}$ אלה קבוצות פתוחות.
אז קבוצות סגורות הן $\tau_{cof}{}^{c}=\{F\subset\mathbb{R} \mid F \ is \ finite\}\cup\{\mathbb{R}\}$.
אין רציפות: $f^{-1}\{0\}=\{\pi k: k\in\mathbb{Z}\}$ מקור של קבוצה סגורה לא סגור
אין סגירות: $f(\mathbb{R})=[-1,1]\notin\tau_{cof}{}^{c}$
אין פתיחות: $f(\mathbb{R})=[-1,1]\notin\tau_{cof}$
ג. קובץ ההרצאות עמוד 123.

5. א. הגדירו: מספר Lebesgue של כיסוי פתוח.
ב. הוכיחו שבכל מרחב מטרי ספרבילי לכל כיסוי פתוח יש תת כיסוי בן מניה
(זאת אומרת מרחב כזה מקיים *תכונת לינדלוף*).
ג. נניח $\mathbb{R}^S$ חזקה טופולוגית של מרחב ממשיים $\mathbb{R}$. הוכיחו ש $\mathbb{R}^S$ קומפקטי מקומית אם ורק אם S קבוצה סופית.

פתרון:
א. קובץ ההרצאות עמוד 113 .

ב. נניח (X,τ) מרחב מטריזבילי ספרבילי. אז הוא בעל תכונת מניה שנייה. קיים בסיס γ בן מניה.
יהי $\{O_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של (X,τ). לכל $x\in X$ קיים $i_x\in I$ כך ש $x\in O_{i_x}$.
לפי הגדרת בסיס קיימים $U_x\in\gamma$ כך ש $x\in U_x\subseteq O_{i_x}$.

נתון ש γ בן מניה. אפשר ליצור מספור $\{U^{(n)}\}=\{U_x\}_{x\in X}$.

לכל $n\in\mathbb{N}$ נבחר $x(n)\in X$ כך ש $U^{(n)}=U_{x(n)}$.

נתבונן בקבוצה בת מניה $J:=\{i_{x(n)}\mid n\in\mathbb{N}\}\subseteq I$.

כעת מספיק להוכיח ש $\{O_j\}_{j\in J}$ גם כיסוי של X. זאת אומרת ש $\cup_{j\in J}O_j=X$.

אכן לכל $x\in X$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $U^{(n)}=U_x$. לכן

$x\in U_x=U^{(n)}=U_{x(n)}\subseteq O_{i_{x(n)}}\subseteq\cup_{j\in J}O_j$.

ג. **אם** S **סופית** (נגיד עם n איברים) אז $\mathbb{R}^S\simeq\mathbb{R}^n$
וכמובן $\mathbb{R}^n$ קומפקטי מקומית (כי לכל קטור $v\in\mathbb{R}^n$ נתון ניקח כדור סגור $B_r[v]$ (כמובן סביבה ל v) שהוא קומפקטי (לפי משפט Heine-Borel) כתת קבוצה חסומה וסגורה ב $\mathbb{R}^n$.

אם S **אינסופית**

כל סביבה $V\in N(x)$ של כל נקודה $x=(x_s)_{s\in S}\in\mathbb{R}^S$

מכילה תיבה בסיסית $U=\bigcap_{j\in J}p_j^{-1}(O_j)$

כאשר $J\subset S$ סופית, O_j פתוחות,

$$\forall s\notin J\quad p_s(U)=p_s\Big(\bigcap_{j\in J}p_j^{-1}(O_j)\Big)=\mathbb{R}$$

לכן גם $\forall s\notin J\quad p_s(U)\subseteq p_s(V)=\mathbb{R}$

סביבה V לא יכולה להיות קומפקטית כי תמונה רציפה שלה $\mathbb{R}$ לא קומפקטית.

<u>בונוס:</u> הוכיחו ששתי צורות 83 16 (כתת מרחבים של המישור) הן לא הומיאומורפיות
אבל כל אחת תמונה רציפה של השניה.

פתרון:
נסמן מ"ט הנ"ל $Y:=83$ $X:=16$.
קודם כל נוכיח שהם לא הומיואומורפיים. אם נניח בשלילה שכן קיים הומיואומורפיים $f:X\to Y$
אז הוא חייב לשמור על מרכיבי קשירות בהתאמה לכן
$f(1)=8, f(6)=3$ או $f(1)=3, f(6)=8$.
אבל 1 לא הומיואומורפי עם 8 (ל 8 יש נקודה אחת בלבד שמחלקת אותו לעומת זאת ל 1 יש אינסוף).
6 לא הומיואומורפי עם 8 (ל 8 יש נקודה אחת בלבד שמחלקת אותו לעומת זאת ל 6 יש אינסוף).

כעת נוכיח שקיימות פונקציות רציפות על $h_2:Y\to X$ $h_1:X\to Y$.

- מקרה של $h_1:X\to Y$.
  8 תמונה רציפה של 6 (להדביק שתי נקודות ב 6 "עליונה" עם "נקודת החיבור")
  $h_{11}:6\to 8$
  3 תמונה רציפה של 1 $h_{12}:1\to 3$
  על 16 נגדיר $h_1:16\to 83$ דרך $h_{12}:1\to 3$ $h_{11}:6\to 8$.
  רציפות של $h_1:16\to 83$ מובטחת כי 16 זה **פירוק טופולוגי** (עם הגורמים 1 ו- 6).

- מקרה של $h_2:Y\to X$
  1 תמונה רציפה של 3 $h_{21}:3\to 1$
  6 תמונה רציפה של 8 $h_{22}:8\to[0,1]\to 6$
  שימו לב: קטע סגור $[0,1]$ תמונה רציפה של 8 בעזרת **"מעיכה"**