

תרגיל בית מספר 4

תאריך הגשה: 9.05.2012

שאלה 1

הוכח או הפרך שהאוסף הבא מגדיר טופולוגיה:

$$א. X = [0, \infty) \quad \tau = \{\emptyset, X, (a, \infty) : a \geq 0\}$$

$$ב. X = \mathbb{N} \quad \tau = \{\emptyset, X, A : \mathbb{N} \text{ אינסופית ב-} \mathbb{N}\}$$

שאלה 2

תזכורת:

$$\tau_{co-\aleph_0} = \{O \subseteq X : |O^c| \leq \aleph_0 \vee O = \emptyset\}$$

א. הוכיחו ש- $(X, \tau_{co-\aleph_0})$ הוא מרחב טופולוגי.

ב. נניח ש- $|X| \leq \aleph_0$. הוכיחו כי $\tau_{co-\aleph_0} = \tau_{disc}$.

ג. האם בתנאי סעיף ב' $(X, \tau_{co-\aleph_0})$ מטריזבילי?

שאלה 3

א. תהי X קבוצה אינסופית, ו- τ טופולוגיה על X הכוללת את כל תתי

הקבוצות האינסופיות (אך לא בהכרח רק את אלה). הראו ש- (X, τ)

היא הטופולוגיה הדיסקרטית.

ב. יהי X מצוייד בטופולוגיה הקו-סופית. נניח שקיימות במרחב לפחות 3 קבוצות

סגורות. הראו ש- X סופית.

ג. תהי X קבוצה אינסופית, ו- τ טופולוגיה על X עם התכונה הבאה:

הקבוצה האינסופית היחידה שהיא פתוחה היא X עצמה. האם τ היא בהכרח

הטופולוגיה הטריטוריאליט? נמקו את תשובתכם.

שאלה 4

נניח \leq סדר חלקי (ז"א רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטיסימטרי) על קבוצה X . נגדיר את

"טופולוגיית סדר חלקי" τ_{\leq} מעל X עפ"י התנאי הבא:

$$O \in \tau_{\leq} \text{ אם } O = \{y \in X \mid y \leq x\} \text{ כאשר } \forall x \in X (x \in O \Rightarrow x \leq O)$$

הוכיחו ש- (X, τ_{\leq}) הוא מ"ט וחיתוך של אינסוף קבוצות פתוחות במרחב זה גם הוא פתוח.

שאלה 5

- א. יהי X מ"מ שלם ויהי A ת"מ מטרי סגור של X . הוכיחו ש- A שלם.
ב. יהי X מ"מ ו- A תת קבוצה סגורה של X . הראו ש- A תת מרחב שלם.

שאלת בונוס

בדקו האם האוספים הבאים הם טופולוגיות על \mathbb{R} :

- א. \mathbb{R}, \emptyset , וכל הקטעים מהצורה $[-r, r]$ עבור r אי רציונאלי חיובי.
ב. \mathbb{R}, \emptyset , כל הקטעים מהצורה $[-r, r]$, וכל הקטעים מהצורה $(-r, r)$ עבור r אי רציונאלי חיובי.

בהצלחה!