תרגיל 7

1. הוכח:
א. תת מרחב של B_1 הוא B_1.
ב. תת מרחב של T_3 הוא T_3.

2. תהי X קבוצה לא בת מניה. הוכח: (X,τ_{coc}) היא לא B_1 כאשר

$$\tau_{coc}=\{O\subseteq X||O^c|\leq\aleph_0\}$$

3. א. יהי X מרחב טופולוגי. הוכח: X רגולרי אמ"ם כל קבוצה סגורה בX שווה לחיתוך כל הסביבות הסגורות שלה.
ב. יהי X מרחב T_3 ו$A,B\subseteq X$ תת קבוצות סגורות זרות, כך שלפחות אחת מהן סופית, אז יש להן סביבות מפרידות.

4. הגדרה: קבוצה נקראת G_δ אם היא חיתוך בן מניה של קבוצות פתוחות.
א. הוכח: אם X הוא T_1 וB_1 אז כל נקודון $\{x\}\subseteq X$ הוא G_δ.
ב. הוכח: שתי התכונות הכרחיות. כלומר, אם נוריד את אחת התכונות, הטענה לא בהכרח תהיה נכונה.

5. א.תנו דוגמא למרחב שהוא T_2 אבל לא T_3 (רמז: היעזרו בתרגילי הבית הקודמים)
ב. אם $\sigma\subseteq\tau$ שתי טופולוגיות על X, אז לכל $i\in\{0,1,2\}$ אם (X,τ) היא T_i אז גם (X,σ) הוא T_i. הטענה לא נכונה לגבי T_3.

6. א. תנו דוגמא לשני מרחבים X,Y כך שX הומיאומרפי לתת מרחב של Y, Y הומיאומורפי לתת מרחב של X, אבל X וY לא הומיאומורפיים.
ב. הוכיחו: שלמות היא לא תכונה טופולוגית. כלומר, אינה נשמרת תחת הומיאומורפיזם.

7. הוכיחו/הפריכו:
$(1,2)\cup(3,4)\cong(5,7)\cup\{0\}$.