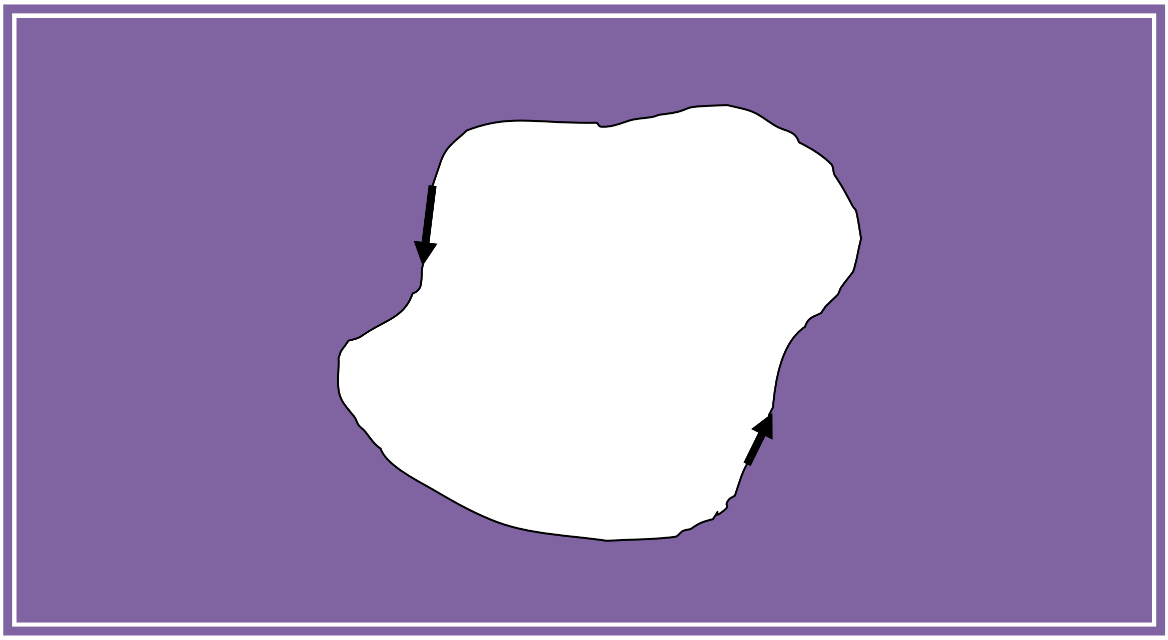
עוד על אינטגרליים קוויים ומשפט GREEN

משפט גרין מנוסח כ: $\int_\gamma Pdx + Qdy = \iint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}Q - \frac{\partial}{\partial y}P\right] dxdy$ בתנאים המתאימים כאשר אינטגרל קווי משמאל לאורך מסילה פשוטה סגורה בעלת אורך , בעלת אוריינטציה חיובית שמהווה את השפה של התחום ביחס אליו האינטגרל הכפול מימין , כל אלו עבור שדה ("תבנית") שהיא C^1 .



1. יישום למשפט GREEN - מציאת שטח קבוצות במישור :

ידוע כי שטח של תחום Ω במישור נתון על ידי האינטגרל הכפול

: $vol(\Omega) = \iint_\Omega 1dxdy$ $(*)$, בתנאי שאינטגרל זה קיים . לכן אם במשפט גרין נקבל בצד האינטגרל הכפול שלו את צורת האינגרל האחרון $(*)$ עבור תחום שמקיים את תנאי משפט GREEN, נוכל לחשב אותו בעזרת חישוב האינטגרל הקווי מצד שמאל של הנוסחא לאורך שפת התחום.

נוכל לקבל ביטוי לאינטגרל של שטח באינטגרל הכפול במשפט GREEN אם מתקיים:

$\frac{\partial}{\partial x}Q - \frac{\partial}{\partial y}P = 1$, וזה יקרה אם למשל האינטגרל הקווי במשפט GREEN יהיה

מהצורות : $\int_\gamma \boldsymbol{xdy}$, או : $\int_\gamma \boldsymbol{-ydx}$, או: $\frac{1}{2}\int_\gamma \boldsymbol{-ydx + xdy}$, כשנבחר את אחת הצורות <u>לפי מורכבות חישוב האינטגרל בכל אחת מהן</u>.

<u>דוגמא 1 :</u> נמצא את שטח הכלוא על ידי גרף האליפסה :$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. ראשית נציג את גרף האליפסה בהצגה פרמטרית : $\gamma(t) = (acost, bsint), t \in [0,2\pi]$.

נשתמש בצורה השלישית של אינטגרל קווי לחישוב השטח - $\frac{1}{2}\int_\gamma \boldsymbol{-ydx + xdy}$ (תיכף נראה מדוע צורה זו דווקא!) :

$$\boldsymbol{Area} = \frac{1}{2}\int_\gamma \boldsymbol{-ydx + xdy} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[-bsint * (-asint) + acost * bcost]dt =$$

$$= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \boldsymbol{ab\pi}$$

*אם היינו מנסים לחשב את השטח על ידי שימוש באחת משתי הצורות האחרות , האינטגרלים היו יוצאים מסובכים יותר לחישוב , למשל :

$$\int_\gamma \boldsymbol{-ydx} = \int_0^{2\pi} -bsint * (-asint)dt = \cdots \; .$$

<u>דוגמא 2 :</u>

חשבו את השטח שכלוא בין ציר ה- x וקשת אחת של הציקלויאדה המיוצגת על ידי הצגה פרמטרית : $x = a(t - sint), y = a(1 - cost)$

<u>פיתרון 2:</u>

קשת אחת של ציקלויאדה מתאימה לקטע פרמטר $t \in [0,2\pi]$ (שימו לב שבקטע זה ערך ה-x אי שלילי וכנ"ל גם ערך ה- y) .

נגדיר מסילה $C = C_1 + C_2$, כאשר C_1 הוא <u>קטע על ציר ה – x</u> בין $(0,0)$ ל- $(0,2\pi)$, ו- C_2 החלק של הציקלויאדה בין אותן שתי נקודות אך בכיוון הנגדי מ- $(0,2\pi)$ ל- $(0,0)$.

אז המסילה המתקבלת הינה במגמה חיובית וניתן להשתמש במשפט GREEN לחישוב השטח כאינטגרל כפול. קיים $Area = -\int_{C=C_1+C_2} ydx = -\int_{C_1} ydx - \int_{C_2} ydx$

כאשר $-\int_{C_1} ydx = 0$ מכיוון שלאורך המסילה הזו y מתאפס ! ולכן נקבל :

$$Area = -\int_{C=C_1+C_2} ydx = -\int_{C_2} ydx = -\int_{2\pi}^{0} a(1 - cost) * a(1 - cost)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2(1 - 2cost + cos^2t)dt = a^2\left[t - 2sint + \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}sin2t\right)\right]\begin{matrix}2\pi\\0\end{matrix} = \mathbf{3\pi a^2}$$

תרגיל- מסוג אחר לגמרי ☺

מצאו עקומה סגורה פשוטה (שמקיימת תנאי משפט *GREEN*) שלאורכה יש לאינטגרל הבא ערך מקסימלי : $\int_C \frac{1}{3}y^3dx + \left(x - \frac{1}{3}x^3\right)dy$.

פיתרון

לפי הנתון , העקומה המבוקשת C מקיימת תנאי משפט *GREEN* ולכן לפי משפט זה , מתקיים :

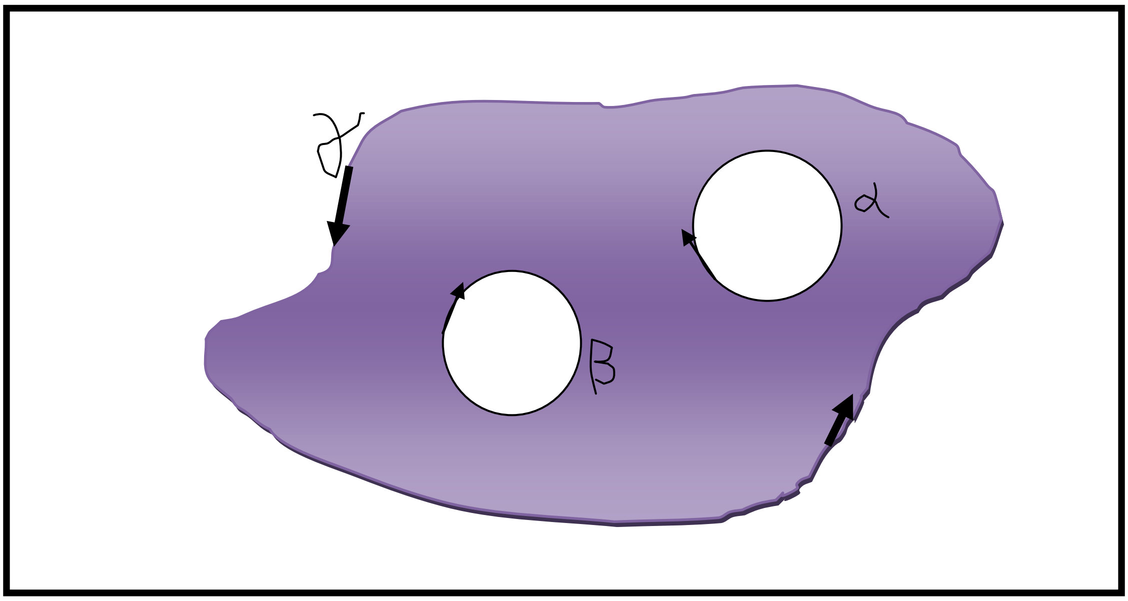
$$\int_C \frac{1}{3}y^3dx + \left(x - \frac{1}{3}x^3\right)dy = \iint_R [(1-x^2) - (y^2)]dxdy = \iint_R (1-x^2-y^2)dxdy$$

כאשר R הינו התחום החסום על ידי העקומה המבוקשת.

כעת - נשים לב שהאינטגרל הכפול הוא של פונקצייה שהינה אי שלילית עבור תחום שהוא פנים מעגל עם רדיוס 1 מסביב לראשית ! וכל קבוצה פתוחה שחותכת את התחום הלא חסום מחוץ למעגל זה היא כזו שערך הפונקציה $1-x^2-y^2$ עליה יהיה שלילי! .

ולכן , ערך האינטגרל יהיה מקסימלי אם R - התחום ביחס אליו נעשה אינטגרציה כפולה יהיה המעגל הנ"ל .ולכן – המסילה היא שפת המעגל הזה!

משפט GREEN לתחומים שונים מהניסוח המקורי :



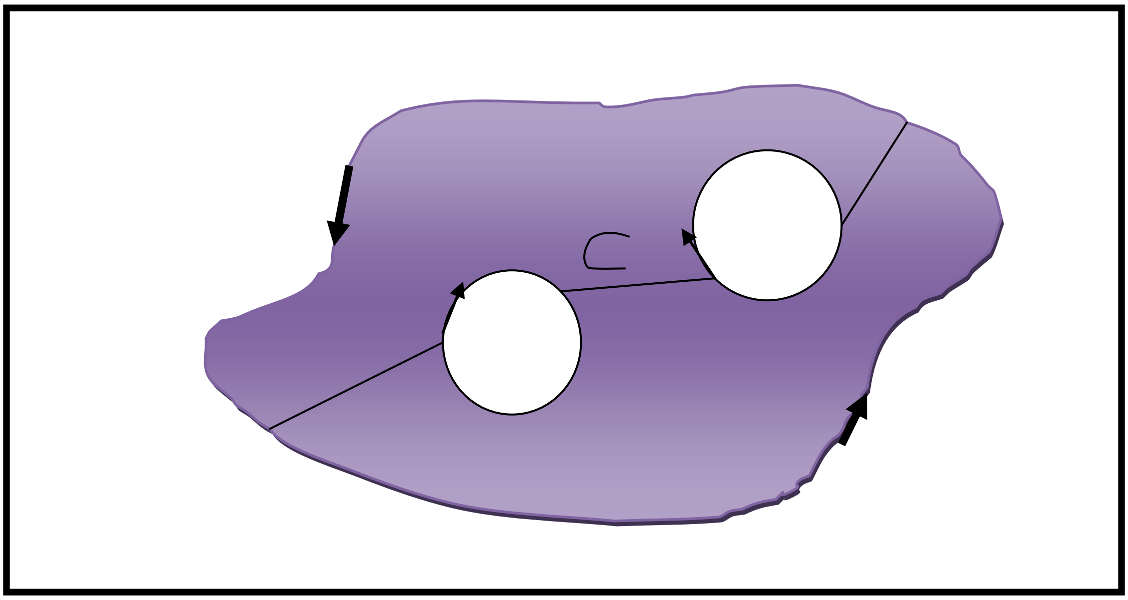
נניח שהתחום במישור הוא זה הצבוע בסגול – יוסמן ב- Ω וששפתו מורכבת מתמונת המסילות γ, α, β כבתרשים למעלה (כל אחת מהן מסילת ז"ורדן – פשוטה , סגורה ובעלת אורך) כאשר כיווני ההתקדמות כמו שמצויין – כאשר מתקדמים לפיהם – התחום הנ"ל נמצא משמאל .

מגדירים ***תחום גרין*** להיות תחום במישור Ω ששפתו $\partial\Omega$ (סימון לשפה , ולא לדיפרנציאל!) ,מורכבת ממספר סופי של מסילות ז"ורדן ואם נוסחת גרין מתקיימת לכל שתי פונקציות

P, Q רציפות על הסגור של התחום (כלומר איחוד התחום עם שפתו) , ובעלות נגזרות חלקיות רציפות על התחום.

נניח שהתחום השרטוט מתאר תחום ז"ורדן כזה – אז מגדירים:

$$\int_{\partial\Omega}(P,Q)\cdot d\underline{x} = \int_{\gamma}(P,Q)\cdot d\underline{x} + \int_{\alpha}(P,Q)\cdot d\underline{x} + \int_{\beta}(P,Q)\cdot d\underline{x}$$



נסתכל על התחום שלנו כשחילקנו אותו בעזרת חלק מסילה C שחוצה אותו <u>משמאל לימין</u> לשני חלקים – *Upper* ו - *Lower*.

אם נחשב אינטגרל כפול על התחום , של פונקציה שצורתה כמו בנוסחת גרין , נקבל:

$$\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}Q - \frac{\partial}{\partial y}P\right]dxdy = \iint_{\text{Upper}}[\ldots]dxdy + \iint_{\text{Lower}}[\ldots]dxdy =$$

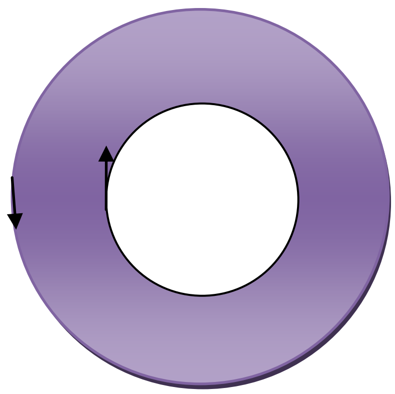
$$= \int_{\partial(Upper)}Pdx + Qdy + \int_{\partial(Lower)}Pdx + Qdy = \int_{\gamma}[\ldots] + \int_{\alpha}[\ldots] + \int_{\beta}[\ldots] = \int_{\boldsymbol{\partial\Omega}}[\ldots]$$

כלומר – אינטגרל כפול על התחום שווה לאינטגרל מסילתי על שפת התחום (שמגמתו חיובית !). הנוסחא נכונה כי הולכים לאורך המסילה שהוספנו שחותכת את התחום שלנו- פעם משמאל לימין ופעם מימין לשמאל – כך שהאינטגרלים הקויים לאורכם מתקזזים

בערכם- וכאשר כל אחד מחלקי התחום – העליון והתחתון – מקיימים תנאי משפט *GREEN* המקורי (לפחות עבור התחום כמתואר בתרשים).

<u>תרגיל:</u>

נחשב את האינטגרל הקווי $\int_C xe^{-2x}dx + (x^4 + 2x^2y^2)dy$, כאשר *C* היא שפת התחום שלנו שהוא התחום הכלוא בין שתי שפות המעגלים $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 1$, כשלאורך כל אחד מהם מתקדמים בכיוון חיובי (התחום נמצא משמאלנו לאורך התנועה).



נגדיר : $(P, Q) \coloneqq (xe^{-2x}, x^4 + 2x^2y^2)$, השדה הוקטורי שלנו . אז קיים :

$Q_x - P_y = 4x^3 + 4xy^2 - 0 = 4x(x^2 + y^2)$. אם נשתמש במשפט גרין עבור תחום גרין הנ"ל שיסומן D , נקבל על סמך מה שראינו (עם שימוש בקואורדינטות קוטביות!) :

$$\iint_D 4x(x^2 + y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_1^2 4rcos\theta * r^2rdrd\theta = 4\int_0^{2\pi} cos\theta d\theta * \int_1^2 r^4dr$$

והתשובה היא 0 !