פתרונות תרגיל 6

1) נסמן t - זמן

V - נפח הגליל

r - רדיוס הגליל

h - גובה הגליל

נתון $\frac{dh}{dt}=1$ ונתון שבזמן t_0 $r(t_0)=h(t_0)=1$.

3 בזמן מחפשים $\frac{dh}{dt}(t_0)=?$. $V(t)=\pi r^2\, r(t)\, h(t)$

ומכאן $0=\frac{dV}{dt}=2\pi rh\frac{dr}{dt}+\pi r^2\frac{dh}{dt}$

והנגזרת 0 כי נתון שהנפח קבוע. ומכאן

$$\frac{dh}{dt}=\frac{-2\pi rh\frac{dr}{dt}}{\pi r^2}=\frac{-2h\frac{dr}{dt}}{r}=\frac{-2\cdot1\cdot1}{1}=-2$$

2) א.) $F(x)=\frac{x-1}{x^2}$

בכל נק' $x\neq0$ המנה רציפה כמנה של רציפות.

ב- $x=0$,

$$\lim_{x\to0}\frac{x-1}{x^2}=st\left(\frac{\Delta x-1}{\Delta x^2}\right)=st\left(\frac{1}{\Delta x}-\frac{1}{\Delta x^2}\right)$$

$$=st\left(\frac{1-\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x^2}\right)\longrightarrow \text{לא קיים}$$

לכן F רציפה רק ב- $x\neq0$.

ב.)

$$F(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}, & x>0\\ \frac{1}{4}, & x=0\\ e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{4+x}, & x<0\end{cases}$$

לכל $x\neq 0$ היא רציפה.

עבור $x=0$,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\underset{\Delta x>0}{st}\left(\frac{\sqrt{4+\Delta x}-2}{\Delta x}\right)=$$

$$=\underset{\Delta x>0}{st}\left(\frac{(\sqrt{4+\Delta x}-2)(\sqrt{4+\Delta x}+2)}{\Delta x(\sqrt{4+\Delta x}+2)}\right)=$$

$$=\underset{\Delta x>0}{st}\left(\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{4+\Delta x}+2)}\right)=\underset{\Delta x>0}{st}\left(\frac{1}{\sqrt{4+\Delta x}+2}\right)=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{4+x}=\underset{\Delta x<0}{st}\left(e^{-\frac{1}{\Delta x}}+\frac{1}{4+\Delta x}\right)$$

$$=\underset{\Delta x<0}{st}\left(e^{-\frac{1}{\Delta x}}\right)+\underset{\Delta x<0}{st}\left(\frac{1}{4+\Delta x}\right)$$

$e^{-\frac{1}{\Delta x}}$ עבור $\Delta x<0$ הוא אינסופי ולכן

לא קיים חלק סטנדרטי.

לכן f <u>אינה</u> רציפה ב- $x=0$. ב- $x=-4$ $\lim_{x\to -4} f=\infty$

לכן <u>לא</u> רציפה

$x=-4 \Rightarrow$

c) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-25}}{x}$

<u>תחום הגדרה</u> $x\le -5$ או $x\ge 5$

עבור $x>5$ או $x<-5$ הפונ' רציפה.

מכיוון ש הרכב רציפות.

נבדוק רציפות מימין ב- $x=5$ ורציפות

משמאל ב- $x=-5$.

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{\sqrt{x^2-25}}{x}=\underset{\Delta x>0}{st}\left(\frac{\sqrt{(5+\Delta x)^2-25}}{5+\Delta x}\right)$$

$$=\underset{\Delta x>0}{st}\left(\frac{\sqrt{10\Delta x+\Delta x^2}}{5+\Delta x}\right)=0=f(5)$$

$$\lim_{x\to -5^-}\frac{\sqrt{x^2-25}}{x}=\underset{\Delta x<0}{st}\left(\frac{\sqrt{(-5+\Delta x)^2-25}}{-5+\Delta x}\right)$$

$$=\underset{\Delta x<0}{st}\left(\frac{\sqrt{-10\Delta x+\Delta x^2}}{-5+\Delta x}\right)=0=f(-5)$$

f רציפה מימין ב- $x=5$ ומשמאל ב- $x=-5$.

3) א) אם $f(x)+g(x)$ רציפה ב- x_0 אז גם $g(x)$, $f(x)$ רציפות ב- x_0.

<u>הטענה אינה נכונה.</u>

<u>דוגמא</u>

$$g(x)=\begin{cases}-1+x, & x<0\\ 1+x, & x\geq 0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0\\ -1+x, & x\geq 0\end{cases}$$

שתי הפונ' אינן רציפות ב- $x=0$ אבל סכומן

$f(x)+g(x)=2x$ היא פונ' רציפה.

ב) אם $f(x)$ רציפה ב- x_0 ו $g(x)$ אינה רציפה ב- x_0
אז $f(x)+g(x)$ אינה רציפה ב- x_0.

<u>הטענה נכונה.</u>

נניח בשלילה שהפונ' $S(x)=F(x)+g(x)$ רציפה
ב-x_0 אזי $g(x)=S(x)-F(x)$ תהיה
רציפה. סתירה.

ב) אם $F(x)$ רציפה ב-x_0 ו-$g(x)$ אינה רציפה
ב-x_0 אזי $F(x)\cdot g(x)$ אינה רציפה ב-x_0.
הטענה <u>אינה</u> נכונה.
למשל
$F(x)=0$ לכל x ו-$g(x)$ כלשהי שאינה
רציפה. אזי $F(x)g(x)=0$ לכל x ולכן רציפה.

4)
$$F(x)=\begin{cases}\frac{\sin 3x}{x}, & x\neq 0\\ m, & x=0\end{cases}$$

הפונ' רציפה לכל $x\neq 0$.
נבדוק ב-$x=0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=st\left(\frac{\sin(3\Delta x)}{\Delta x}\right)=$$

$$=st\left(\frac{\sin(3\Delta x)}{\frac{1}{3}\cdot 3\Delta x}\right)=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$$

לכן נבחר $m=3$.

5) א)
$$F(x)=\begin{cases}2x^2+1, & x<1\\ 3-x, & x\geq 1\end{cases}$$

לכל $x\neq 1$ הפונ' רציפה.
נבדוק ב-$x=1$.

$$\lim_{x\to 1^+}3-x=\underset{\Delta x>0}{st}(3-(1+\Delta x))=\underset{\Delta x>0}{st}(2-\Delta x)=2$$

$$\lim_{x\to 1^-}2x^2+1=\underset{\Delta x<0}{st}(2(1+\Delta x)^2+1)=\underset{\Delta x<0}{st}(3+4\Delta x+\Delta x^2)=3$$

גבולות חד צדדים קיימים אך שונים לכן
$x=1$ נק' אי-רציפות מסוג ראשון.

ה) $F(x)=\dfrac{x^2}{(x+1)^4}$

F רציפה ב- $x\neq -1$.

נבדוק ב- $x=-1$

$$\lim_{x\to -1^+} F(x) = st_{\Delta x>0}\left(\frac{(-1+\Delta x)^2}{\Delta x^4}\right)$$

$$= st_{\Delta x>0}\left(\frac{1-2\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x^4}\right) \Rightarrow \infty$$

$x=-1$ נק' אי-רציפות מסוג שני

ו) $F(x)=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$$

$$\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

$$x=\pi+2\pi k$$

$$\lim_{x\to(\pi+2\pi k)^+} F(x) = st_{\Delta x>0}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi k+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi k+\frac{\Delta x}{2}\right)}\right)=\infty$$

לכן יש נקודות אי-רציפות מסוג שני
ב- $x=\pi+2\pi k$.

$$F(x)=\begin{cases} e^{x+5} & , x>-5 \\ 5x+26 & , x\le -5 \end{cases}$$

נבדוק רציפות ב- $x=-5$.

$$\lim_{x\to -5^+} F(x)=\underset{\Delta x>0}{St}\left(e^{-5+\Delta x+5}\right)=\underset{\Delta x>0}{St}\left(e^{\Delta x}\right)=\underline{1}$$

$$\lim_{x\to -5^-} F(x)=\underset{\Delta x<0}{St}\left(5(-5+\Delta x)+26\right)=$$

$$=\underset{\Delta x<0}{St}\left(5\Delta x+1\right)=\underline{1}$$

$$F(-5)=1$$

לכן $\lim_{x\to -5^+} F(x)=\lim_{x\to -5^-} F(x)=F(-5)$

לכן F רציפה ב- $x=-5$.

נבדוק גזירות ב- $x=-5$.

$$F'(-5)=St\left(\frac{F(-5+\Delta x)-F(-5)}{\Delta x}\right)$$

עבור $\Delta x>0$

$$St\left(\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right)=1$$

עבור $\Delta x<0$

$$St\left(\frac{5(-5+\Delta x)+26-1}{\Delta x}\right)=5$$

ה- St תלוי מהכיוון של Δx לכן

לא קיים לכן F אינה גזירה ב- $x=-5$.