משפט לגרנז': אם $f\left(x\right)$ רציפה בקטע $\left[a,b\right]$ וגזירה ב-$\left(a,b\right)$, אזי קיימת נקודה $c\in\left(a,b\right)$ כך ש-

$$f'\left(c\right)=\frac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{b-a}.$$

משפט רול: (מקרה פרטי של משפט לגרנז')

אם $f\left(x\right)$ רציפה בקטע $\left[a,b\right]$, גזירה ב-$\left(a,b\right)$ ו- $f\left(a\right)=f\left(b\right)$, אזי קיימת נקודה $c\in\left(a,b\right)$ כך ש-

$$f'\left(c\right)=0.$$

תרגילים:

1. תהי $f\left(x\right)$ פונקציה גזירה פעמיים בכל $\mathbb{R}$ ותהיינה x_1,x_2,x_3 3 נקודות שונות כך ש- $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=f\left(x_3\right)$. הוכיחו כי קיימת נקודה $d\in\mathbb{R}$ כך ש- $f''\left(d\right)=0$.

הוכחה:

נניח בה"כ (בלי הגבלת הכלליות), כי $x_1<x_2<x_3$.

בקטע $\left[x_1,x_2\right]$ הפונקציה $f\left(x\right)$ מקיימת את כל התנאים של משפט רול ולכן קיימת נקודה $c_1\in\left(x_1,x_2\right)$ כך ש- $f'\left(c_1\right)=0$.

בקטע $\left[x_2,x_3\right]$ הפונקציה $f\left(x\right)$ מקיימת את כל התנאים של משפט רול ולכן קיימת נקודה $c_2\in\left(x_2,x_3\right)$ כך ש- $f'\left(c_2\right)=0$.

בקטע $\left[c_1,c_2\right]$ הפונקציה $f'\left(x\right)$ מקיימת את כל התנאים של משפט רול ולכן קיימת נקודה $d\in\left(c_1,c_2\right)$ כך ש- $f''\left(d\right)=0$ כדרוש.

2. הוכיחו, כי $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\le\arctan x$ לכל $x\ge0$.

הוכחה:

נגדיר פונקציה $f\left(x\right)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\arctan x$.

לכל $x>0$ הפונקציה מקיימת את התנאים של משפט לגרנז' בקטע $\left[0,x\right]$ ולכן קיימת נקודה $c\in\left(0,x\right)$ כך ש-

$$f'\left(c\right)=\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\arctan x}{x}$$

$$f'\left(c\right)=\frac{\sqrt{1+c^2}-\frac{c^2}{\sqrt{1+c^2}}}{1+c^2}-\frac{1}{1+c^2}=\frac{1}{\left(1+c^2\right)^{3/2}}-\frac{1}{1+c^2}=\frac{1-\sqrt{1+c^2}}{\left(1+c^2\right)^{3/2}}<0\quad\forall c$$

ולכן $0 < \dfrac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \arctan x}{x}$ ומזה נובע ש- $\arctan x < \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ולכל $x > 0$.

עבור $x = 0$ מתקיים $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan x = 0$ ולכן $\arctan x \le \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ לכל $x \ge 0$ כדרוש.

3. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה לכל $x \ge 0$. נניח שלכל $x \ge 0$ מתקיים $f(x) > 0$ ו- $f'(x) > 1$.

הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $f(x) > x$.

הוכחה: לכל $x > 0$ הפונקציה מקיימת את התנאים של משפט לגרנז' בקטע $[0, x]$ ולכן קיימת נקודה $c \in (0, x)$ כך ש- $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

לפי הנתון $f(x) > 0$ לכל $x \ge 0$, בפרט $f(0) > 0$ ולכן $\dfrac{f(x)}{x} < \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c)$.

נתון ש-$f'(x) > 1$ ולכן $\dfrac{f(x)}{x} < \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) > 1$ לכל $x > 0$ ולכן $f(x) > x$ לכל $x > 0$ כדרוש.