תרגול 11 - הע"ל

11 באוגוסט 2020

1 מטריצות מייצגות

תרגילים:

1. תרגיל $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ המוגדרת

$$T(p(x))=\begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p(1) & p'(1) \end{pmatrix}$$

מצאו את $[T]_C^B$ במקרים הבאים:

(א) $$B=\left\{1,x,x^2\right\},C=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

פתרון: מטריצה המייצגת העתקה מוגדרת באופן הבא: $T:V\to W$, $B=\{v_1,\ldots,v_n\},C=\{w_1,\ldots,w_m\}$ בסיסים סדורים בהתאמה, אזי:

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix} [Tv_1]_C & \cdots & [Tv_n]_C \end{pmatrix}\in\mathbb{F}^{m\times n}$$

והיא מקיימת:

$$[T]_C^B\cdot[v]_B=[Tv]_C$$

נעשה זאת בבסיסים שלנו:

$$T(1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow[T(1)]_C=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow[T(x)]_C=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(x^2)=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}\Rightarrow\left[T(x^2)\right]_C=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$$

ולכן נקבל:

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$$

(ב)

$$B=\left\{1,1+x,1+x^2\right\},C=\left\{A_1=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},A_3=\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix},A_4=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}\right\}$$

פתרון: ד. מתקיים: $\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&1&a\\2&1&1&-1&b\\-1&1&-1&2&c\\1&1&1&1&d\end{array}\right)\to\cdots\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&\frac{1}{3}\left(-4a-b-2c+7d\right)\\0&1&0&0&a+b+c-2d\\0&0&1&0&a-d\\0&0&0&1&\frac{1}{3}\left(-2a-2b-c+5d\right)\end{array}\right)$.

כלומר,

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\left(-4a-b-2c+7d\right)A_1+(a+b+c-2d)A_2+(a-d)A_3+\frac{1}{3}\left(-2a-2b-c+5d\right)A_4$$

מה שאומר:

$$\left[\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right]_C=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\left(-4a-b-2c+7d\right)\\a+b+c-2d\\a-d\\\frac{1}{3}\left(-2a-2b-c+5d\right)\end{pmatrix}$$

ולכן נקבל:

$$T(1)=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\Rightarrow[T(1)]_C=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$T(1+x)=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\Rightarrow[T(x)]_C=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\2\\0\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$T(1+x^2)=\begin{pmatrix}1&0\\2&2\end{pmatrix}\Rightarrow\left[T(x^2)\right]_C=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

לכן נקבל:

$$[T]_C^B=\begin{pmatrix}-2&\frac{2}{3}&2\\2&2&-1\\1&0&-1\\-1&-\frac{1}{3}&2\end{pmatrix}$$

(ג) מצאו את הגרעין והתמונה של T.

פתרון: מתקיים: $T:V\to W$, $B=\{v_1,\ldots,v_n\},E=\{w_1,\ldots,w_m\}$ בסיסים סדורים בהתאמה, ו־ $[T]_E^B$ מטריצה מייצגת של T אז:

$$[\ker T]_B=N([T]_E^B)$$

$$[ImT]_E=C([T]_E^B)$$

אם נלך לבסיסים הסטנדרטיים אצלנו, נקבל: $a+bx+cx^2\in\ker T$ אמ"ם $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ כלומר, מחפשים את מרחב האפס של המטריצה:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

אין משתנה חופשי, ולכן מרחב האפס הוא רק וקטור האפס. התמונה זה מרחב העמודות של המטריצה, הנפרש ע"י כל עמודות המטריצה שמהוות בסיס.

2. תהא $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ העתקת השיקוף ביחס לציר x, המוגדרת: $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$. מצאו B בסיס כך ש־

$$[T]_B^B=\begin{pmatrix}-1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

פתרון: $B=\{v_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\}$. נקבל

$$\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=[T(v_1)]_B=\left[\begin{pmatrix}x_1\\-y_1\end{pmatrix}\right]_B$$

ולכן:

$$-1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+0v_2=\begin{pmatrix}x_1\\-y_1\end{pmatrix}\Rightarrow x_1=0$$

בדומה עבבור העמודה השניה נקבל:

$$2\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\-y_2\end{pmatrix}\Rightarrow y_1=-y_2$$

לכן למשל $B=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ פתרון.

3. תהיינה $T:V_1\to V_2, S:V_2\to V_3$ הע"ל. הוכיחו:

(א) $\ker(T)\subseteq\ker(S\circ T)$

(ב) $Im(S\circ T)\subseteq Im(S)$

פתרון: א. יהי $x\in\ker T$ ולכן $(S\circ T)x=S(Tx)\underset{x\in\ker T}{=}S(0)\underset{*}{=}0$ כאשר $*$ בגלל ש־S לינארית.

ב. יהי $x\in Im(S\circ T)$ לכן קיים $v\in V_1$ כך ש־ $(S\circ T)v=S(Tv)=x$, ולכן $Tv\in V_2$ מקור של x ביחס ל־S.

4. תהא $T:\mathbb{R}^{2\times2}\to\mathbb{R}^{2\times2}$ המקיימת:

$$T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\in span\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

ובנוסף, נתונה מטריצה מייצגת שלה:

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & x & 8 \\ 0 & 0 & x & 4 \end{pmatrix}$$

(א) מצאו את x.

פתרון: כיון ששלושה וקטורים בת"ל, תמונתם נפרשת ע"י 2 וקטורים, נקבל שמימד התמונה הוא לכל היותר 3. לכן מימד מרחב העמודות של מטרייצה מייצגת כלשהי צריך להיות לכל היותר 3. נשים לב שמימד מרחב העמודות של $[T]_C^B$ הוא לפחות 3 (כי העמודות: 1,2,4 בת"ל), ולכן נדרוש $x = 0$ כדי לקבל שמימד מרחב העמודות הוא 3 (לכל $x \neq 0$ מימד מרחב העמודות הוא 4).

(ב) קבעו איזה איברים של השורה האחרונה של $[T^{10}]_S^S$הינם בוודאות 0 (כאשר $S = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ הוא הבסיס הסטנדרטיי של מרחב המטריצות).

פתרון: נשים לב שמתקיים:

$$\forall A \in span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} : [A]_S = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן נקבל:

$$[T]_S^S = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \Rightarrow [T^{10}]_S^S = \left([T]_S^S\right)^{10} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}^{10} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

(ג) הוכיחו שקיים בסיס D של $\mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש־

$$[T]_D^D = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}$$

ויש לה שורת אפסים.

פתרון: ראינו שמימד התמונה הוא 3, לכן מימד הגרעין הוא 1, לכן יש v_1 כך

ש־ $\ker T = span\{v_1\}$ והוא יהיה הוקטור הראשון ב־D.
יש לנו v_2, v_3, v_4 כך ש־ $Im(T) = span\{v_2, v_3, v_4\}$. אם $v_1 \notin Im(T)$ אז $D = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ בסיס. ולכן אם $v \in ImT$ אז $v = av_2 + bv_3 + cv_4 = 0v_1 + av_2 + bv_3 + cv_4$, ונקבל ש־ $[v]_D = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, ולכן $[Tv_i]_D = \begin{pmatrix} 0 \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix}$, $i \in \{2,3,4\}$. שורת האפסים תהיה הראשונה.

אם v_1 תלוי ב־ $v_2, v_3 v_4$, אז נוכל לקחת $D' = \{v_1, v_i, v_j\}$ קבוצה בת"ל שפורשת את התמונה, ולהשלים אותה לבסיס $D = \{v_1, v_i, v_j, v\}$ של $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ונקבל: אם $v \in ImT$ אז $v = av_1 + bv_i + cv_j = av_1 + bv_i + cv_j + 0v$, ונקבל ש־ $[v]_D = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$, ולכן $[Tv_i]_D = [Tv_j]_D = [Tv]_D = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ 0 \end{pmatrix}$.
שורת האפסים תהיה האחרונה.

5. יהא $V = \mathbb{R}_2[x]$, ושני בסיסים:

$$B = \{2+x, 3-x+x^2, -2+4x-x^2\}, C = \{1+x+x^2, 2+2x, x+2x^2\}$$

ונסמן $S = \{1, x, x^2\}$, הבסיס הסטנדרטי.

(א) מצאו את מטריצות המעבר: $[I]_C^S, [I]_S^B, [I]_C^B, [I]_B^C$

פתרון:

$$[I]_S^B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[I]_C^S = \left([I]_S^C\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מתקיים:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & & 1 & \\ 1 & 0 & 2 & & & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 2 & -2 & 1 \\ & 1 & & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ & & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

ולכן:

$$[I]_C^B = [I]_C^S \cdot [I]_S^B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -13 \\ 0 & -3 & 5.5 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$