.1

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$$

במקום ה$1,1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + (-1)(-4) + 2 \cdot 1 =$$

במקום ה$1,2$:

$$1 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1)$$

במקום ה$2,1$:

$$2 \cdot 3 + 0 \cdot (-4) + 1 \cdot 1 =$$

במקום ה$2,2$:

$$2 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) =$$

.2

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{3\times 2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 10 \\ 0 & 4 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. חשבו את העמודה הראשונה של המכפלה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \\ 9 & 22 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

+

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \\ 9 & 22 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 22 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 24 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. חשבו את העמודה השניה של המכפלה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \\ 9 & 22 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 22 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 12 \\ 53 \end{pmatrix}$$

5. חשבו את השורה השלישית של המכפלה.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

6. תרגיל: תהא A מטריצה ו b וקטור עמודה. יהא w פתרון למערכת $Ax = b$ ויהא v פתרון למערכת ההומגנית $Ax = 0$. חשבו את הכפל

$$A \begin{pmatrix} | & | & | & | & | \\ v & w & v+w & v-w & w-v \\ | & | & | & | & | \end{pmatrix}$$

אנחנו יודעים ש$Aw = b, Av = 0$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} Av & Aw & A(v+w) & A(v-w) & A(w-v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & b & -b & b \end{pmatrix}$$

תזכורת: תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ אז $A^t \in \mathbb{F}^{n\times m}$ כך ש: $\forall i,j : A^t_{i,j} = A_{j,i}$

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

תרגיל: הוכיחו שלכל 2 מטריצות מאותם גדלים, מתקיים: $(A+B)^t = A^t + B^t$
פתרון: נסמן $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$
בשביל להוכיח ששתי מטריצות שוות צריך להרות שהגדלים שווים, והרכיבים שווים.
$A + B \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ולכן $(A+B)^t \in \mathbb{F}^{n\times m}$
$A^t, B^t \in \mathbb{F}^{n\times m}$ ולכן $A^t + B^t \in \mathbb{F}^{n\times m}$

$$(A+B)^t_{i,j} = (A+B)_{j,i} = A_{j,i} + B_{j,i}$$

$$(A^t + B^t)_{i,j} = A^t_{i,j} + B^t_{i,j} = A_{j,i} + B_{j,i}$$

תרגיל: $(AB)^t = B^t A^t$
הסבר אינטואיטיבי למה צריך להפוך את הסדר: $A, \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times k}$

$$A^t \in \mathbb{F}^{n\times m}, B^t \in \mathbb{F}^{k\times n}$$

הוכחה: הוכחת שוויון הגדלים- תעשו בשיעורי בית.

$$(AB)^t_{i,j} = (AB)_{j,i} = \sum_{l=1}^{n} A_{j,l} B_{l,i}$$

$$(B^t A^t)_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} B^t_{i,l} A^t_{l,j} = \sum_{l=1}^{n} B_{l,i} A_{j,l}$$

הגדרה: מטריצה A תיקרא סימטרית אם $A = A^t$
ותקרא אנטי- סימטרית אם $A = -A^t$

7. דוגמאות:

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

מטריצה סימטרית
הערה: מטריצות סימטריות ואנטי- סימטריות הן בהכרח ריבועיות.
מטריצה אנטי סימטרית:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

הערה: מטריצת האפס היא גם סימטרית וגם אנטי סימטרית.
תרגיל: הוכיחו שבמטריצה אנטי סימטרית (מעל הממשיים) כל איברי האלכסון שווים ל0.
הוכחה: נניח שA אנטי סימטרית. כלומר, $A = -A^t$

$$A_{i,i} = (-A^t)_{i,i} = (-A)_{i,i} = -A_{i,i}$$

לכן $A_{i,i} = 0$.
תרגיל נוסף: האם יש מטריצות נוספות מעל הממשיים שהן גם סימטריות וגם אנטי סימטריות?
פתרון: נניח שA גם סימטרית וגם אנטי סימטרית.

$$A = A^t, A = -A^t$$

כלומר

$$A^t = -A^t$$

ולכן $A = 0$.
תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הוכיחו כי $A + A^t$ סימטרית ו $A - A^t$ אנטי סימטרית.
פתרון:

$$(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t$$

$$(A-A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -(A-A^t)$$

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. הוכיחו כי AA^t סימטרית. מה לגבי $-AA^t$

פתרון:

$$(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$$

כפל בסקלר של מטריצה סימטרית היא עדיין מטריצה סימטרית.

מטריצות ריבועיות:

(א) מטריצת היחידה.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\forall i \neq j, A_{ij} = 0, \forall i = j, A_{ij} = 1$$

(ב) מטריצת האפס (הריבועית)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\forall i, j, A_{ij} = 0$$

(ג) מטריצה משולשית עליונה

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

$$\forall i > j, A_{ij} = 0$$

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ד) מטריצה משולשית תחתונה

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & \ddots & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\forall i < j, A_{ij} = 0$$

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ה) מטריצה אלכסונית

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

$$\forall i \neq j, A_{ij} = 0$$

דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(ו) מטריצה סקלרית

$$\alpha I$$

לדוגמא:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

הערה: כל מטריצה אלכסונית היא גם משולשית עליונה.
גם הכיוון השני נכון. כלומר, כל מטריצה שהיא גם משולשית עליונה וגם משולשית תחתונה היא אלכסונית
הסבר: נניח שA משולשית עליונה ותחתונה. יהיו $j \neq i$. או ש$j < i$ אן ש$i < j$.
אם $j < i$ אז $A_{i,j} = 0$ כי A משולשית תחתונה. ואם $j > i$ אז $A_{i,j} = 0$ כי A משולשית עליונה.
הוכיחו:

i. כפל של סקלריות היא סקלרית
ii. כפל של אלכסוניות היא אלכסונית.
א'. עבור מטריצה אלכסונית D למה שווה ? $D^n =$
iii. כפל של משולשיות (מאותו סוג) היא משולשית (מאותו סוג).

פתרון : א.

$$(\alpha I)(\beta I) = (\alpha\beta)II = \alpha\beta I$$

השתמשנו בתכונת הסקלר הנודד.
ב. יהיו A, B מטריצות אלכסוניות. צריך להוכיח שלכל $i \neq j$

$$(AB)_{i,j} = 0$$

$$(AB)_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} A_{i,l}B_{l,j} = 0$$

ידוע ש כאשר $i \neq l$ אז $0 = A_{i,l}$, וכאשר $j \neq l$ אז $0 = B_{l,j}$. מכיוון ש$i \neq j$ תמיד נקבל שהאינדקס הרץ שונה מאחד מהם. לכן תמיד אחד הרכיבים שווים ל0.
טענת המשך :

$$(AB)_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}$$

הוכחה :

$$(AB)_{i,i} = \sum_{l=1}^{n} A_{i,l}B_{l,i} = 0 + 0+,,,+A_{i,i}B_{i,i} + 0... + 0$$

לדוגמא :

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 4 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 8 & \\ & & -3 \end{pmatrix}$$

הערה : $A^n = A \cdot A \cdots A$ n פעמים.
מסקנה : אם A מטריצה אלכסונית אז A^n היא אלכסונית כאשר כל איבר באלכסון מעלים בחזקת n

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2^{100} & \\ & & 3^{100} \end{pmatrix}$$

הוכיחו : כפל של משולשיות (מאותו סוג) היא משולשית (מאותו סוג).
הוכחה : יהיו A, B מטריצות משולשיות עליונות ויהיו $i > j$.

$$(AB)_{i,j} = 0$$

$$(AB)_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} A_{i,l} B_{l,j} = 0$$

הסבר: מכיוון שA משולשית עליונה אז כאשר $i > l$, $A_{i,l} = 0$. כאשר $l \geq i$ אז מכיוון ש$i > j$ נקבל ש$l > j$. ואז בגלל שB היא משולשית עליונה אז $B_{l,j} = 0$.
מסקנה: מכאן אפשר להסיק שכפל של מטריצות אלכסניות היא מטריצה אלכסונית. וזאת מכיוון שכל מטריצה אלכסונית היא גם משולשית עליונה וגם משולשית תחתונה. אז הכפל היא מטריצה שהיא גם משולשית עליונה וגם משולשית תחתונה. וכל מטריצה כזאת היא בהכרח אלכסונית.
הגדרה: עבור מטריצה ריבועית,

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,i}$$

.1