# הרצאת חזרה לקבוצה של פרופ' כהן

21 בינואר 2014

### 0.1 התמרת לפלס

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(x)) &= \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \\
\mathcal{L}(e^{ax}) &= \int_0^\infty e^{ax} e^{-sx} dx = \int_0^\infty e^{(a-s)x} dx = \frac{1}{s-a} \quad (s>a)
\end{aligned}
$$

ההתמרה של אקספוננט זו התמרה חשובה כיוון שכעת קיבלנו קוטב. ההתמרה ההפוכה

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-a}\right) = e^{ax}$$

עבור ביטוי המורכב משברים חלקיים כל ביטוי יתרום אקספוננט. במבחן סביר להניח שנקבל משוואה

$$y'' + 3y' - 4y = f(x)$$

ומחשבים התמרת לפלס לכל צד בהתבסס על לינאירות ההתמרה:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(y'' + 3y' - y) &= \mathcal{L}(f(x)) \\
\mathcal{L}(y') &= \int_0^\infty e^{-sx} y' dx \\
&= ye^{-sx} \mid_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-sx} y dx \\
&= y(0) + s\mathcal{L}(y) \\
\mathcal{L}(y'') &= \int_0^\infty e^{-sx} y'' dx \\
&= y'e^{-sx} \mid_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-sx} y' dx \\
&= -y'(0) - sy(0) + s^2\mathcal{L}(y)
\end{aligned}
$$

$$-y'(0) - sy(0) + s^2\mathcal{L}(y) - 3y(0) + 3s\mathcal{L}(y) - 4\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(f(x)$$

הומוגנית $f(x)=0$:

$$\begin{aligned}
-y'(0)+sy(0)+3y(0) &= (s^2+3s-4)\mathcal{L}(y) \\
&= (s-\lambda_1)(s-\lambda_2) \\
y'(0)+sy(0)+3y(0) &= (s+4)(s-1)\mathcal{L}(y) \\
\mathcal{L}(y) &= \frac{y'(0)+sy(0)+3y(0)}{(s+4)(s-1)}
\end{aligned}$$

### 0.1.1 תרגיל לדוגמה:

$y'-ay=xe^{bx}$

### 0.1.2 פתרון:

$$\int_0^\infty e^{-sx}xe^{bx}dx=\int_0^\infty e^{(b-s)x}xdx$$

## 0.2 משפט ליוביל

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=0$$

היכן ש $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ פתרונות בת"ל.

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x a_1(x)dx}$$

ורוצים למצוא פתרונות נוספים בעזרת משפט ליוביל.

### 0.2.1 דוגמה

$$\begin{aligned}
y''-2y'+y &= 0 \\
y_1 &= e^x \\
w(x_0) &= c
\end{aligned}$$

,

$$\begin{aligned}
W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & y_2 \\ e^x & y_2' \end{vmatrix} = e^x y_2' - e^x y_2 \\
e^x(y_2'-y_2) &= ce^{-\int -2dx} = ce^{2x} \\
y_2'y_2 &= ce^x
\end{aligned}$$

### 0.2.2 דוגמה נוספת

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$$

פתרון:

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

ניתן וריאצית המקדמים אבל גם ניתן למצוא אופרטור מאפס. לפלס לא פשוט!

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^x \\ \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A \begin{pmatrix} t_1' \\ t_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^x \\ \cos x \end{pmatrix} \Big\backslash \cdot A^{-1} \\
A^{-1} A \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} &= A^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + A^{-1} \begin{pmatrix} e^x \\ \cos x \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x \\ \cos x \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ניתן גם עם וריאציית המקדמים (אך אם המטריצה גדולה הדבר עלול להיות קשה).

## 0.3 שונות ושאלות נוספות

### 0.3.1 תזכורת לצורת ז'ורדן

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \lambda_n & \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}}_{M}$$

$$\begin{aligned}
(M - \lambda_m I) u &= 0 \\
(M - \lambda_m I)^n v &= 0
\end{aligned}$$

לדוגמה:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{M} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2 \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x}$$

$$M - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(M-2I)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} \\
\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x} + 2x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} \\
M\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= x\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2x}
\end{aligned}$$

### 0.3.2 שאלה

מצא מד"ר עם מקדמים קבועים שפתרונותיה הם $\cos 4x(x^2+1)e^{2x}$
פתרון:
באופן שקול ר"ל פתרונות מהצורה:

$$(x^2+1)e^{(2\pm 4i)x}$$

יש כאן פולינום מסדר 2 ולכן האקספוננט צריך להיות מריבוי 3 לפחות. הפ"א של המשוואה צריך לכלול את השורשים לפחות 3 פעמים, בצורה הבאה:

$$\begin{aligned}
&[(\alpha-(2+4i))(\alpha-(2-4i))]^3 \\
&(\alpha^2-4\alpha+20)^3
\end{aligned}$$

ונקבל:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 4\frac{d}{dx} + 20\right)^3 y = 0$$

וזה נסתפק.

$$(Ax^2+Bx+C)e^{2x}\cos 4x + (Dx^2+Ex+F)e^{2x}\sin 4x$$

### 0.3.3 שאלה על טורים

מצא פתרון בטור ל$y'' + x^2y' + 2xy = 0$.

### 0.3.4 פתרון:

נציב

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
y' &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \\
y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} \\
\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1+2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} &= 0 \\
\sum_{n'=0}^{\infty} a_{(n'+2)}(n'+2)(n'+1)x^{n'} + \sum_{n'=2} a_{(n'-1)}(n'-1)x^{n'} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_{(n'-1)}x^{n\prime} & \\
n' = 0 &\Rightarrow a_2 \cdot 2 \cdot 1 = 0 \\
n' = 1 &\Rightarrow \ldots
\end{aligned}$$

### 0.3.5 שאלה על מד"ר מסדר שני

$$(y')^2 + (\sin x - 2xy)y' - 2xy \sin x = 0$$

בלי פאניקה! הצטיידו במגבת אע"פ שהיקום לא הוחרב בידי ווגונים ופתרו משוואה ריבועית לפי $y'$:

$$y'_{1,2} = \frac{2xy - \sin x \pm \sqrt{(\sin x - 2xy)^2 + 8xy\sin x}}{2} = \frac{2xy - \sin x \pm \sqrt{(\sin x + 2xy)^2}}{2}$$

ומאידך זיל גמור.

$$\boxed{\mathcal{GOOD\quad LUCK}\ \ddot{\smile}}$$