תזכורת:

בשיעור הקודם הגדרנו עוצמה של קבוצה A, מסמנים ב $|A|$ להיות הסודר הקטן ביותר שיש פונקציה חח"ע ועל ממנו לA.

בנוסף, הגדרנו "מונה"- סודר שלכל סודר שקטן ממנו, אין פונקציה חח"ע ועל ממנו למונה.

עוצמה של קבוצה היא תמיד מונה.

בבדידה לא הגדרתם מה זה עוצמה, אבל הגדרתם מה זה $|A| = |B|$ או $|A| \leq |B|$, וראינו שההגדרות החדשות שהבאנו מתלכדות עם ההגדרות מבדידה.

חומר חדש:

בבדידה הגדרתם ש$|A| < |B|$ אם היא קטנה שווה ולא שווה. כלומר, יש פונקציה חח"ע מA לB ואין פונקציה חח"ע ועל מA לB.

טענה, הבאים שקולים:

1. $|A| < |B|$ (לפי ההגדרות של תורת הקבוצות).
2. יש פונקציה חח"ע מA לB, אבל אין פונקציה חח"ע מB לA.
3. אין פונקציה חח"ע מB לA.

הוכחה:

$2 \to 1$: $|A| < |B|$ בפרט $|A| \leq |B|$ ולכן יש פונקציה חח"ע מA לB (הוכחנו בשיעור הקודם). אם הייתה פונקציה חח"ע מB לA, אז $|B| \leq |A|$ (עדיין השקילות שהוכחנו בשיעור הקודם). אבל מקש"ב (שגם אותו הוכחנו בשיעור הקודם) זה היה גורר ש$|A| = |B|$. סתירה.

$3 \to 2$: ברור.

$1 \to 3$: מכיוון שיש פונקציות חח"ע ועל מA ל$|A|$ ומB ל$|B|$ אז אם אין פונקציה חח"ע מB לA זה אומר שגם אין פונקציה חח"ע מ$|B|$ ל$|A|$. (כי אם היה, היינו יכולים להרכיב אותה עם הפונקציות החח"ע ועל, ולקבל פונקציה חח"ע מB לA)

זה אומר ש$|B| \nsubseteq |A|$ אחרת הייתה פונקציה חח"ע.

לכן $|A| \subsetneq |B|$ וזה בדיוק ההגדרה של $|A| < |B|$ בסודרים.

טענה: לכל n טבעי, n הוא מונה.

הוכחה: באינדוקציה.

0 הוא מונה כי התנאי מתקיים באופן ריק.

נניח שn הוא מונה, ואנחנו רוצים להוכיח ש$n+1$ הוא מונה.

אם $n+1$ לא היה מונה, אז הייתה פונקציה חח"ע ועל מm שקטן מ$n+1$ ל$n+1$. $m \neq 0$ כי ברור שאין פונקציה חח"ע מקבוצה ריקה לקבוצה שאינה ריקה.

אבל אז היינו יכולים להוריד איבר מהמקור ואת התמונה שלו ולקבל פונקציה חח"ע ועל מ$m-1$ לn. בסתירה לכך שn הוא מונה.

טענה: ω הוא מונה.

הוכחה: אם ω אינו מונה, אז יש פונקציה חח"ע ועל מאיזשהו n טבעי לω. נקח את n להיות המינימלי.

נסתכל על $n+1$.

יש פונקציה חח"ע מ$n+1$ לω.

מההנחה, יש פונקציה חח"ע מω ל$n+1$. (כי הנחנו שיש פונקציה חח"ע מω לn. וברור שיש פונקציה חח"ע מn ל$n+1$)

נקבל ש $|n+1| = |\omega|$. אבל הנחנו ש$n = |\omega|$. ו$n+1$ אז $|n+1| = n+1$. אז נקבל ש$n = n+1$ וזה סתירה.

טענה: תהי A קבוצה. $H(A)$ (הסודר של הארטוגס. שזה הסודר הקטן ביותר שאין פונקציה חח"ע ממנו לA) הוא מונה.

הוכחה: נניח בשלילה ש$H(A)$ הוא לא מונה. זה אומר שיש $\alpha < H(A)$ כך שיש פונקציה חח"ע ועל מα ל$H(A)$.

מההגדרה של $H(A)$ נקבל שיש פונקציה חח"ע מα לA. ניתן להרכיב את הפונקציה החח"ע ועל מ$H(A)$ לα, עם הפונקציה החח"ע מα לA ולקבל פונקציה חח"ע מ$H(A)$ לA, בסתירה להגדרה של $H(A)$.

טענה: יהי κ מונה, אזי $H(\kappa)$ הוא מונה שגדול מκ. ולמעשה, הוא המונה הראשון שגדול מκ.

הוכחה: ראינו ש$H(\kappa)$ מונה.

מהגדרה, אין פונקציה חח"ע ממנו לκ.

מהתרגיל הראשון שעשינו היום, ראינו שזה גורר ש$|H(\kappa)| > |\kappa|$ אבל עוצמה של מונה שווה למונה בעצמו. לכן $\kappa < H(\kappa)$.

כעת יהי $\alpha < H(\kappa)$ מונה. אז קיימת פונקציה חח"ע מα לκ. ראינו שזה גורר ש $|\alpha| \leq |\kappa|$, אבל הם מונים, ולכן $\alpha \leq \kappa$.

קיבלנו ש$H(\kappa)$ הוא המונה הראשון שגדול ממש מκ.

הערה: נסמן את $H(\kappa)$ בκ^+.

ארתמטיקה של מונים

חיבור מונים: יהיו κ, λ שני מונים.

נגדיר

$$\kappa \oplus \lambda = |\kappa + \lambda|$$

כלומר, ההגדרה של הסכום של מונים, הוא העוצמה של חיבור שלהם כסודרים.

בבדידה הגדרתם סכום של עוצמות להיות: אם A וB קבוצות זרות, אז

$$|A| + |B| = |A \cup B|$$

שימו לב שזה אותו דבר. כי $\kappa + \lambda$ מוגדר להיות טיפוס הסדר של

$$\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}$$

ברור שזה איחוד של קבוצות זרות. ולכן יש פונקציה חח"ע ועל מ$\kappa + \lambda$ ל$\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}$ ולכן $|\kappa + \lambda| = |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|$. ומתקיים ש$\kappa = |\kappa \times \{0\}|$ ו$\lambda = |\lambda \times \{0\}|$.

למשל:

$$\omega \oplus \omega = \omega$$

כי העוצמה של הסודר $\omega + \omega$ היא ω.

כפל מונים: יהיו κ וλ מונים.

$$\kappa \otimes \lambda = |\kappa \cdot \lambda|$$

כלומר, העוצמה של הכפל שלהם כסודרים.
שימו לב שזה תואם להגדרה מבדידה כי $\kappa \cdot \lambda = otp(\kappa \times \lambda)$ אז יש פונקציה חח"ע ועל בין $\kappa \cdot \lambda$ ל$\kappa \times \lambda$ ולכן העוצמות שלהן שוות. וההגדרה שהבאתם בבדידה היא לקחת את העוצמה של המכפלה הקרטזית.
חזקות מונים: יהיו κ וλ שני מונים.
נסמן

$$^{\lambda}\kappa = \{f | f : \lambda \to \kappa\}$$

נגדיר

$$\kappa^{\lambda} = |\{f | f : \lambda \to \kappa\}| = |^{\lambda}\kappa|$$

הערה: אין קשר בין חזקות של מונים לחזקות של סודרים.
טענה: תהי A קבוצה, אזי $|P(A)| = 2^{|A|}$
הוכחה: נסמן $\kappa = |A|$. אז

$$2^{|A|} = 2^{\kappa} = |^{\kappa}2|$$

יש פונקציה חח"ע ועל מA לκ, ולכן יש פונקציה חח"ע ועל מ$P(A)$ ל$P(\kappa)$.
אנחנו רוצים להוכיח ש

$$|P(\kappa)| = |^{\kappa}2|$$

נבנה פונקציה חח"ע ועל

$$f : P(\kappa) \to^{\kappa} 2$$

תהי $B \subseteq \kappa$

$$f(B) = \chi_B$$

פונקציית האינדיקטור של B.

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases}$$

f היא אכן חח"ע ועל.
טענה: לכל קבוצה A, $|A| < 2^{|A|}$
הוכחה: נסמן $\kappa = |A|$. אנחנו רוצים להוכיח ש

$$\kappa < 2^{\kappa}$$

ראינו ש $2^\kappa = |P(\kappa)|$
בשביל להראות ש

$$\kappa < |P(\kappa)|$$

מספיק להוכיח שאין פונקציה חח"ע מ$P(\kappa)$ לκ.
שקול להוכיח שאין פונקציה על מκ ל$P(\kappa)$.
תהי $f : \kappa \to P(\kappa)$ כלשהי. נוכיח שהיא לא על.
בשביל זה צריך להצביע על איבר ב$P(\kappa)$, כלומר תת קבוצה של κ, שאין לו מקור.
נסתכל על

$$X = \{x \in \kappa | x \notin f(x)\}$$

נניח שלX יש מקור, a.
אם $a \in f(a)$ אז מכיוון שa הוא מקור של X, אז $f(a) = X$, כלומר $a \in X$. אבל זה אומר ש$a \notin f(a)$. סתירה.
אם $a \notin f(a)$ אז $a \notin X$, אבל זה אומר ש$a \in f(a)$. סתירה.
לכן לא קיים מקור לX.
מסקנה: לכל מונה κ מתקיים ש $\kappa^+ \leq 2^\kappa$.
השערת הרצף: $\omega^+ = 2^\omega$
הערה: לא ניתן להוכיח את השערת הרצף ולא ניתן להפריך אותה.
(מוכיחים את זה באמצעות "תורת הכפיה" theory forcing)
השערת הרצף המוכללת: לכל מונה $\kappa \geq \omega$, $\kappa^+ = 2^\kappa$.
גם את זה לא ניתן להוכיח או להפריך.
(בהמשך הקורס נראה שבהנחת השערת הרצף, אנחנו יכולים לתת נוסחא סגורה לחזקות של מונים)
טענה: יהי α סודר שנמצא בין שני מונים $\lambda > \alpha > \kappa$. אזי $\lambda > |\alpha| \geq \kappa$
הוכחה: $\lambda > \alpha \geq |\alpha|$ לכן $\lambda > |\alpha|$.
יש פונקציה חח"ע מκ לα ולכן $|\kappa| \leq |\alpha|$. אבל $|\kappa| = \kappa$ ולכן $|\alpha| \geq \kappa$.
תרגיל (תוכיחו בתרגול או בש"ב): כל מונה אינסופי הוא סודר גבולי.
תרגיל: $\omega \times \omega = \omega$.
הוכחה:

$$f : \omega \times \omega \to \omega$$

$$f(a, b) = 2^a(2b + 1) - 1$$

זאת פונקציה חח"ע ועל. לא נוכיח.
טענה: יהי κ מונה אינסופי. אזי $\kappa \otimes \kappa = \kappa$.
הוכחה:
שלב ראשון: ברור ש$\kappa \otimes \kappa \geq \kappa$ למשל הפונקציה $f : \kappa \to \kappa \times \kappa$ שמוגדרת ע"י

$$f(\alpha) = (\alpha, 0)$$

היא חח"ע, ולכן

$$\kappa = |\kappa| \leq |\kappa \times \kappa| = \kappa \otimes \kappa$$

אנחנו רוצים להוכיח ש$\kappa \otimes \kappa \leq \kappa$.
אנחנו נעשה את זה באופן הבא: נוכיח שקיים סדר טוב על $\kappa \times \kappa$ שטיפוס הסדר שלו הוא κ.
מזה נקבל ש

$$\kappa \otimes \kappa = |\kappa \times \kappa| \leq otp(\kappa \times \kappa) = \kappa$$

שלב שני:
נגדיר יחס סדר $<_2$ על $On \times On$ באופן הבא:
נסמן את היחס המילוני ב$<_1$.
$(\alpha_1, \beta_1) <_2 (\alpha_2, \beta_2)$ אם:
1. $\max\{\alpha_1, \beta_1\} < \max\{\alpha_2, \beta_2\}$
או:
2. $\max\{\alpha_1, \beta_1\} = \max\{\alpha_2, \beta_2\}$
וגם $(\alpha_1, \beta_1) <_1 (\alpha_2, \beta_2)$.
במילים: אנחנו מחלקים את $On \times On$ למחלקות, לפי המקסימום של הזוגות.
יש יחס בין המחלקות שנקבע לפי הסדר הטבעי על המקסימום הזה.
ובתוך המחלקות יש את היחס המילוני הרגיל.
שלב שלישי: נוכיח ש$<_2$ הוא יחס סדר טוב.
הוכחה: ראשית, נוכיח שזה יחס סדר.
אנטירפלקסיביות: צריך להוכיח שלא מתקיים $(\alpha, \beta) < (\alpha, \beta)$
ואכן, התנאי הראשון לא מתקיים, והתנאי השני לא מתקיים כי יחס הסדר המילוני הוא יחס סדר ולכן אנטירפלקסיבי.
טרנזיטיביות: נניח ש

$$(\alpha_1, \beta_1) <_2 (\alpha_2, \beta_2) <_2 (\alpha_3, \beta_3)$$

צריך להוכיח ש $(\alpha_1, \beta_1) < (\alpha_3, \beta_3)$
אם $\max\{\alpha_1, \beta_1\} < \max\{\alpha_3, \beta_3\}$ - סיימנו.
אחרת, נשים לב שאם

$$(\alpha, \beta) < (\gamma, \delta)$$

אז $\max\{\alpha, \beta\} \leq \max\{\gamma, \delta\}$
לכן $\max\{\alpha_1, \beta_1\} \leq \max\{\alpha_2, \beta_2\}$ וכן $\max\{\alpha_2, \beta_2\} \leq \max\{\alpha_3, \beta_3\}$. לכן $\max\{\alpha_1, \beta_1\} \leq \max\{\alpha_3, \beta_3\}$
אבל הנחנו שהוא לא קטן ממש, אז יש שוויון. כלומר, $\max\{\alpha_1, \beta_1\} = \max\{\alpha_3, \beta_3\}$.
בגלל ש$\max\{\alpha_2, \beta_2\}$ כלוא בין שניהם אז הוא יהיו שווה לשניהם.
לכן לפי הגדרת $<_2$, נקבל ש

$$(\alpha_1, \beta_1) <_1 (\alpha_2, \beta_2) <_1 (\alpha_3, \beta_3)$$

אבל היחס המילוני הוא יחס סדר ולכן טרנזיטיבי. קיבלנו ש

$$(\alpha_1, \beta_1) <_1 (\alpha_3, \beta_3)$$

ובגלל שיש להם את אותו מקסימום, זה גורר ש

$$(\alpha_1, \beta_1) <_2 (\alpha_3, \beta_3)$$

נראה שזה יחס סדר טוב: תהי A תת מחלקה לא ריקה.
נסתכל על כל הזוגות שהמקסימום שלהם הוא המינימלי האפשרי בA.
בתוך התת מחלקה הזאת, יחס הסדר הוא יחס הסדר המילוני, שידוע שהוא יחס סדר טוב ולכן יש שם איבר ראשון, (α, β). הוא יהיה מינימלי ב$(A, <_2)$. אכן יהי $(\gamma, \delta) \in A$. אז

$$\max\{\alpha, \beta\} \leq \max\{\gamma, \delta\}$$

אם הוא קטן ממש- סיימנו.
ואם הם שווים, אז ידוע ש$(\alpha, \beta) <_1 (\gamma, \delta)$ ולכן $(\alpha, \beta) <_2 (\gamma, \delta)$.
שלב רביעי:
היחס שהגדרנו משרה יחס סדר טוב על $\alpha \times \alpha$ לכל סודר.
אנחנו רוצים להוכיח שלכל מונה אינסופי κ, $otp(\kappa \times \kappa, <_2) = \kappa$.
ראשית, נשים לב ש$otp(\kappa \times \kappa, <_2)$ לא יכול להיות קטן ממש מκ, כי ידוע שעוצמה של קבוצה סדורה היטב קטן שווה מטיפוס הסדר שלה, אז נקבל ש $|\kappa \times \kappa| < \kappa$, ואנחנו יודעים שזה לא נכון.
נניח בשלילה שזה לא קורה. כלומר, יש מונה אינסופי κ כך ש$otp(\kappa \times \kappa, <_2) \neq \kappa$. נקח את κ להיות הראשון שמקיים זאת.
לכן $otp(\kappa \times \kappa, <_2) > \kappa$.
נסמן $otp(\kappa \times \kappa, <_2) = \lambda$
אז $\kappa < \lambda$, זה אומר שהוא רישא נאותה של λ.
לכן קיים איזשהו זוג

$$(\alpha, \beta) \in \kappa \times \kappa$$

כך ש

$$(\alpha, \beta) \downarrow \cong \kappa$$

נסמן $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$. אז $\gamma \in \kappa$.
כל האיברים שקטנים שווים מ(α, β) לפי היחס סדר שלנו, המקסימום שלהם קטן שווה מγ.
לכן

$$(\alpha, \beta) \downarrow \subseteq (\gamma + 1) \times (\gamma + 1)$$

נשים לב ש$\kappa = |(\alpha, \beta) \downarrow|$.
כי אם אפשר לסדר אותה לפי κ אז יש פונקציה חח"ע ועל מκ ל$(\alpha, \beta) \downarrow$. ו$\kappa$ הוא מונה, לכן אין פונקציה חח"ע ועל מסודר יותר קטן ל$(\alpha, \beta) \downarrow$.

κ מונה אינסופי, ולכן $(\gamma+1)\times(\gamma+1)$ אינסופית, לכן $\gamma+1$ אינסופי, כלומר $|\gamma+1|$ היא מונה אינסופי.
$\gamma<\kappa$. ציינו שכל מונה אינסופי הוא סודר גבולי, ולכן $\gamma+1<\kappa$. ראינו שזה גורר ש $|\gamma+1|<\kappa$.
בשביל הנוחות, נסמן $\delta=|\gamma+1|$.
אז δ הוא מונה אינסופי שקטן ממש מκ, ולכן מההנחה, $otp(\delta\times\delta)=\delta$.
אבל ראינו שזה גורר ש$\delta=|\delta\times\delta|$.
לסיום, $\downarrow(\alpha,\beta)$ היא קבוצה מעוצמה κ שמוכלת ש$(\gamma+1)\times(\gamma+1)$. ולכן

$$\kappa\leq|(\gamma+1)\times(\gamma+1)|=|\gamma+1|\otimes|\gamma+1|=\delta\otimes\delta=\delta<\kappa$$

סתירה.
משפט: יהי κ מונה אינסופי, ו$0<\lambda\leq\kappa$ מונה כלשהי. אזי

$$\lambda+\kappa=\lambda\otimes\kappa=\kappa$$

הוכחה:
1. $\kappa\leq\lambda\otimes\kappa\leq\kappa\otimes\kappa=\kappa$
האי-שוויון הראשון הוא מהפונקציה החח"ע

$$f:\kappa\to\lambda\otimes\kappa$$

$$f(\alpha)=(0,\alpha)$$

והאי שוויון השני הוא מההכלה

$$\lambda\times\kappa\subseteq\kappa\times\kappa$$

2. $\kappa\leq\lambda+\kappa\leq\kappa+\kappa=2\cdot\kappa=\kappa$
האי שוויון הראשון נובע מהפונקציה החח"ע

$$f:\kappa\to\lambda\times\{0\}\cup\kappa\times\{1\}$$

$$f(\alpha)=(\alpha,1)$$

האי שוויון השני נובע מההכלה של

$$\lambda\times\{0\}\cup\kappa\times\{1\}\subseteq\kappa\times\{0\}\cup\kappa\times\{1\}$$

השוויון השלישי נובע מכך ש:

$$\kappa+\kappa=|\kappa\times\{0\}\cup\kappa\times\{1\}|=|\kappa\times 2|=|2\times\kappa|=2\otimes\kappa$$