

פתרון תרגיל 7 – מבוא לאנליזה 1

1. הראו שהגבולות הבאים לא קיימים בעזרת הגדרת הגבול עפ"י היינה (סדרות):

$$f(x) = 2^{\frac{1}{x}} \quad \text{נסמן : } \lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x}} \quad (\text{א})$$

עבור הסדרה $x_n = \frac{1}{n}$ מתקיים $x_n \rightarrow 0$, $x_n \neq 0$ וכן

$$f(x_n) = 2^{\frac{1}{x_n}} = 2^n \rightarrow \infty$$

מצד שני עבור הסדרה $y_n = -\frac{1}{n}$ מתקיים $y_n \rightarrow 0$, $y_n \neq 0$ וכן

$$f(y_n) = 2^{\frac{1}{y_n}} = 2^{-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$$

לכן לפי היינה הגבול הנ"ל לא קיים (אפילו במובן הרחב).

$$f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{נסמן : } \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad (\text{ב})$$

עבור הסדרה $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ מתקיים $x_n \rightarrow 0$, $x_n \neq 0$ וכן

$$f(x_n) = \cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = \cos(2\pi n) = 1 \rightarrow 1$$

מצד שני עבור הסדרה $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n}$ מתקיים $y_n \rightarrow 0$, $y_n \neq 0$ וכן

$$f(y_n) = \cos\left(\frac{1}{y_n}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 0 \rightarrow 0$$

לכן לפי היינה נובע שהגבול הנ"ל לא קיים.

2. חשבו את הגבולות הבאים:

(א)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 7x^2 + 5}{4x^3 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{7}{x} + \frac{5}{x^3}}{4 + \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3}} = \frac{1 - 0 + 0}{4 + 0 - 0} = \frac{1}{4}$$

(ב)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{(1-x)(1+x)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1+x) - 2}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{1+x} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(ג) כיוון ש- $x \rightarrow -\infty$, מתקיים $x = -\sqrt{x^2}$ (שכן $x < 0$), בעוד ששורש ריבועי כפי שהגדרנו אותו הוא תמיד אי-שלילי). לכן כשמחלקים מונה ומכנה בחזקה הגבוהה (x) מקבלים

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{\frac{2x}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{-\sqrt{x^2}}}{2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}{2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2} = -\frac{1}{2}$$

3. חשבו את הגבולות הבאים:

(א)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{5} \cdot \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{5x}{\sin(5x)} = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$$

כאן השתמשנו במשפט $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ פעמיים, פעם עבור $t = 3x$ ופעם עבור $t = 5x$ (בשני המקרים $t \rightarrow 0 \iff x \rightarrow 0$).

(ב)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \cos(x)}{\sin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin(2x)} \cdot \frac{x \cdot \cos(x)}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin(2x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} \cdot \cos(x) = 1 \cdot 0 = 0$$

כאשר הגבול הראשון על סמך $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ כאשר $t = 2x$, והגבול השני 0 כמכפלת פונקציה חסומה $\cos(x)$ בפונקציה $\frac{x}{2}$ השואפת ל-0.

דרך אחרת: להיעזר בזהות $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \cos(x)}{\sin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \cos(x)}{2\sin(x)\cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{\sin(x)} = 0 \cdot 1 = 0$$

(ג) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$: לכל $x > 1$ מתקיים

$$\frac{2}{x+1} \leq \frac{2}{x + \sin\left(\frac{1}{x}\right)} \leq \frac{2}{x-1}$$

ומתקיים $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x+1} = 0$. לפי כלל הסנדוויץ': $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x + \sin\left(\frac{1}{x}\right)} = 0$

4. סווגו את נקודות אי-הרציפות הבאות (כלומר קבעו סליקה/סוג ראשון/סוג שני):

(א) $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$ בנקודה $x = 2$. נחשב את הגבולות החד-צדדיים:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -1 = -1$$

הגבולות החד-צדדיים קיימים וסופיים אך שונים, לכן $x = 2$ היא נקודת אי-רציפות מסוג ראשון
למעשה ניתן לרשום את $f(x)$ באופן הבא:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 2 \\ -1 & x < 2 \end{cases}$$

כשב- $x = 2$ היא לא מוגדרת).

$$(ב) \quad f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4} \quad \text{בנקודה } x = 1 \text{ ובנקודה } x = 4.$$

בנקודה $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x-1} = -\infty$$

כי $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) = -1$ ו- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$. לכן בנקודה $x = 1$ לפחות אחד הגבולות החד-צדדיים
לא קיים במובן הצר, ומכאן שזו נקודת אי-רציפות מסוג שני.

בנקודה $x = 4$:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-2)(x-4)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-2}{x-1} = \frac{2}{3}$$

ולכן זו נקודת אי-רציפות סליקה.

$$(ג) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 3} \quad \text{בנקודה } x = 3.$$

נשים לב שהפונקציה כלל לא מוגדרת בסביבה שמאלית של $x = 3$ (שכן תחום ההגדרה הוא:
 $x^2 - 9 \geq 0$ וגם $x - 3 \neq 0 \iff x > 3$ או $x \leq -3$), ובוודאי הגבול החד-צדדי השמאלי
לא קיים, וזו נקודת אי-רציפות מסוג שני.