

חיתוך תתי מרחבים – דוגמה

תזכורת: לכל שתי קבוצות A, B

$$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

כלומר חיתוך קבוצות הוא קבוצת כל האיברים המשותפים לשתי הקבוצות.

דוגמה: מצאו את חיתוך תתי המרחבים הבאים של R^3 :

$$U = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, V = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

פתרון: נמצא מתי וקטור מהצורה $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ שייך ל U ומתי הוא שייך ל V .

הוקטור $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ שייך ל U אמ"ם למערכת הבאה יש פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & b \\ 0 & 2 & c \end{array} \right)$$

נדרג ונקבל:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & b \\ 0 & 2 & c \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 0 & -5 & b-2a \\ 0 & 2 & c \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 0 & -5 & b-2a \\ 0 & 0 & 5c+2b-4a \end{array} \right)$$

לכן, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ שייך ל U אמ"ם $5c+2b-4a=0$.

בדומה, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ שייך ל V אמ"ם למערכת הבאה יש פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & a \\ 4 & 1 & b \\ 3 & -1 & c \end{array} \right)$$

נדרג ונקבל:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & a \\ 4 & 1 & b \\ 3 & -1 & c \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & a \\ 0 & -3 & b-2a \\ 0 & -8 & 2c-3a \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & a \\ 0 & -3 & b-2a \\ 0 & 0 & 6c-8b+7a \end{array} \right)$$

לכן, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ שייך ל U אם"ם $6c - 8b + 7a = 0$.
בסה"כ

$$U \cap V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : 6c - 8b + 7a = 0, 5c + 2b - 4a = 0 \right\}$$

במילים אחרות חיתוך המרחבים הוא מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & -8 & 6 & 0 \\ -4 & 2 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

ואת זה אנחנו יודעים לחשב.

בהצלחה! 😊