תרגיל 12 פתרונות

שאלה 1

$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy \quad D=\{(x,y)\mid (x^2+y^2)^2\le x^2-y^2, \quad x\ge 0\}$$

יש כאן כל מיני x^2+y^2 אז סביר לנסות הצבה פולארית $x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta$.
נקבל שהתחום הוא

$$r^4\le r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$r^2\le \cos^2\theta-\sin^2\theta$$

זה אומר שהתחום שלנו עבור θ הוא $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ כי מחוץ לתחום הזה $\cos^2\theta-\sin^2\theta<0$
(נשים לב שאנחנו עובדים רק איפה ש $x\ge 0$)
ולכן האינטגרל הוא:

$$\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int\limits_0^{\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}} r\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \underset{\substack{t=r^2\\dt=2rdr}}{=} \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int\limits_0^{\cos^2\theta-\sin^2\theta}\frac{1}{2}\sqrt{1-t}\mathrm{d}t\mathrm{d}\theta$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}(-\frac{2}{3})\ (1-t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\cos^2\theta-\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(-\frac{1}{3}(1-\cos^2\theta+\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3})\mathrm{d}\theta$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(-\frac{1}{3}\sqrt{8}|\sin^3\theta|+\frac{1}{3})\mathrm{d}\theta=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(-\frac{1}{3}\sqrt{8}|\sin^3\theta|)\mathrm{d}\theta+\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{3})\mathrm{d}\theta$$

עכשיו

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(-\frac{1}{3}\sqrt{8}|\sin^3\theta|)\mathrm{d}\theta=-\frac{2\sqrt{8}}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta$$

נזכור ש

$$\int\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=\int\sin\theta(1-\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta \underset{\substack{t=\cos\theta\\dt=-\sin\theta d\theta}}{=} -\int(1-t^2)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3-t=\frac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta$$

ולכן

$$-\frac{2\sqrt{8}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\theta \mathrm{d}\theta = -\frac{2\sqrt{8}}{3}\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta)\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{2\sqrt{8}}{3}(\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} + 1)$$
$$= -\frac{2}{9} + \frac{4}{3} - \frac{4}{9}\sqrt{8} = \frac{10}{9} - \frac{4}{9}\sqrt{8}$$

האינטגרל שנשאר הוא:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{3})\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{6}$$

כלומר התוצאה הסופית היא:

$$\frac{10}{9} - \frac{4}{9}\sqrt{8} + \frac{\pi}{6}$$

שאלה 2

$$\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq Rx\}$$

נניח ש $R > 0$ (אם $R < 0$ הפתרון סימטרי ושווה).
גם כאן נראה סביר לנסות קוארדינטות פולריות
נקבל שהתחום הוא

$$r^2 \leq Rr\cos\theta$$

כלומר

$$r \leq R\cos\theta$$

כמובן שזה אפשרי רק כאשר $\cos\theta \geq 0$ כלומר כאשר $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. ולכן האינטגרל שלנו הוא

$$\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R\cos\theta} r\sqrt{R^2 - r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}\left.(R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right|_0^{R\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}(R^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}R^3\mathrm{d}\theta$$

האינטגרל השמאלי הוא:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}(R^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}\theta = -\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3\sin^3\theta\mathrm{d}\theta$$

את זה כבר חישבנו בשאלה הקודמת. מתקבל:

$$-\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3\sin^3\theta\mathrm{d}\theta = -\frac{2}{3}R^3\ \left(\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{9}R^3$$

האינטגרל הימני הוא:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}R^3\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{3}R^3$$

ולכן בסך הכל מתקבל

$$\frac{\pi}{3}R^3 - \frac{4}{9}R^3$$

שאלה 3

$$\iiint_D xdxdydz \quad D = \{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \quad x \geq 0\}$$

שיטה א': x היא פונקציה אי זוגית והתחום הרלוונטי הוא סימטרי ביחס ל x ולכן האינטגרל הוא 0.
שיטה ב':
נניח ש $a,b,c > 0$ (אחרת צריך להיות במקומות המתאימים $-a,-b,-c$ והפתרון דומה)
נבצע החלפת משתנים

$$u = \frac{x}{a}, \quad v = \frac{y}{b}, \quad w = \frac{z}{c}$$

המטריצה של החלפת המשתנים היא:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

והדטרמיננטה היא: $\frac{1}{abc}$.
לכן

$$\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \frac{1}{abc}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

כלומר:

$$\iiint\limits_{D} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{D'} au(abc)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = a^2bc\iiint\limits_{D'} u\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

כאשר

$$D' = \{(x,y,z) \mid u^2+v^2+w^2 \leq 1, \quad u \geq 0\}$$

כעת נשתמש בהחלפת קוארדינטות כדוריות ונקבל:

$$a^2bc\iiint\limits_{D'} u\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = a^2bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2\sin\varphi)(r\cos\theta\sin\varphi)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = a^2bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^3\sin^2\varphi\cos\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{a^2bc}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin^2\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 0$$

שאלה 4

$$\iiint\limits_{D}(x+y+z)dxdydz \quad D = \{(x,y,z) \mid \sqrt{y^2+z^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2-z^2}\}$$

מהתחום מתבקש להשתמש בקוארדינטות גליליות

$$x = x, \quad y = r\cos\theta, \quad z = r\sin\theta$$

ואז התחום הוא:

$$r \leq x \leq \sqrt{4-r^2}$$

כמו כן, r מוגבל להיות בין 0 ל $\sqrt{2}$ (כי צריך ש $r \leq \sqrt{4-r^2}$) ו θ חופשי, כלומר בין 0 ל 2π.

לכן האינטגרל הוא

$$\iiint\limits_D (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_r^{\sqrt{4-r^2}} \int\limits_0^{2\pi} r(x + r\cos\theta + r\sin\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x\mathrm{d}r =$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_r^{\sqrt{4-r^2}} (rx\theta + r\sin\theta - r\cos\theta)\Big|_0^{2\pi} \mathrm{d}x\mathrm{d}r = \int\limits_0^{\sqrt{2}} \int\limits_r^{\sqrt{4-r^2}} 2\pi r x \mathrm{d}x\mathrm{d}r$$

$$= \int\limits_0^{\sqrt{2}} \pi r x^2\Big|_r^{\sqrt{4-r^2}} \mathrm{d}r = \pi \int\limits_0^{\sqrt{2}} (r(4-r^2) - r^3)\mathrm{d}r = \pi \int\limits_0^{\sqrt{2}} (4r - 2r^3)\mathrm{d}r$$

$$= \pi(2r^2 - \frac{1}{2}r^4)\Big|_0^{\sqrt{2}} = 4\pi - 2\pi = 2\pi$$

שאלה 5

$$\iiint\limits_D (x+y+z)^2 dxdydz \quad D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 3, \quad x^2+y^2 \le 2z\}$$

התחימה $x^2+y^2+z^2 \le 3$ גורמת לחשוב על קוארדינטות כדוריות, אבל $x^2+y^2 \le 2z$ לא מתאים לזה כל כך. אז ננסה גליליות.

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

ואז התחום הופך להיות $r \le \sqrt{3-z^2}$ ו $r \le \sqrt{2z}$
התנאים האלה נפגשים כאשר

$$\sqrt{2z} = \sqrt{3-z^2}$$

$$2z = 3 - z^2$$

$$z^2 + 2z - 3 = 0$$

כלומר

$$z = 1$$

(נשים לב שהדרישה $x^2+y^2 \le 2z$ מחייבת $z > 0$)

כמו כן התנאי $x^2+y^2+z^2\leq 3$ נותן את המגבלה $z\leq\sqrt{3}$.
קיבלנו שבתחום $0\leq z\leq 1$ r יכול להיות בתחום $[0,\sqrt{2z}]$ובתחום $1\leq z\leq\sqrt{3}$ r יכול להיות בתחום $[0,\sqrt{3-z^2}]$.
נביט על האינטגרל:

$$\iiint_D (x+y+z)^2 dxdydz = \iiint_D (x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz)dxdydz$$

נשים לב שהביטויים xy, xz הם אי זוגיים (ביחס ל x) והתחום הוא סימטרי ביחס ל x ולכן האינטגרל שלהם הוא 0.
בדומה, הביטוי yz הוא אי זוגי ביחס ל y בעוד שהתחום סימטרי ביחס ל y.
לכן נותרנו עם האינטגרל

$$\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

אם נבצע את המעבר לקואורדינטת גליליות נקבל

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{2z}}\int_0^{2\pi} r(r^2+z^2)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z + \int_1^{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3-z^2}}\int_0^{2\pi} r(r^2+z^2)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$
$$= 2\pi(\int_0^1\int_0^{\sqrt{2z}} r(r^2+z^2)\mathrm{d}r\mathrm{d}z + \int_1^{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3-z^2}} r(r^2+z^2)\mathrm{d}r\mathrm{d}z)$$

נחשב ראשית

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{2z}} r(r^2+z^2)\mathrm{d}r\mathrm{d}z = \int_0^1 (\frac{1}{4}r^4+\frac{1}{2}r^2z^2)\Big|_0^{\sqrt{2z}}\mathrm{d}z = \int_0^1 z^2+z^3\mathrm{d}z = \frac{7}{12}$$

ו

$$\int_1^{\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3-z^2}} r(r^2+z^2)\mathrm{d}r\mathrm{d}z = \int_0^1 (\frac{1}{4}r^4+\frac{1}{2}r^2z^2)\Big|_0^{\sqrt{3-z^2}}\mathrm{d}z = \int_0^1 (\frac{1}{4}(3-z^2)^2+\frac{1}{2}(3-z^2)z^2)\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^1 (\frac{1}{4}(9-6z^2+z^4)+\frac{1}{2}(3z^2-z^4))\mathrm{d}z = \int_0^1 (\frac{9}{4}-\frac{1}{4}\mathrm{z}^4)\mathrm{d}z = \frac{9}{4}-\frac{1}{20} = \frac{44}{20}$$

ולכן התוצאה הסופית היא:

$$2\pi(\frac{44}{20}+\frac{7}{12}) = \frac{167}{30}\pi$$

שאלה 6

$$\iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad D=\{(x,y,z)\mid 1\le x^2+y^2\le 4-z^2\}$$

נשתמש בקואורדינטות גליליות ונקבל שהתחום הוא:

$$1\le r\le\sqrt{4-z^2}$$

זה גם מגביל את z להיות בתחום $[0,\sqrt{3}]$ ולכן האינטגרל הוא:

$$\iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-z^2}}\int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-z^2}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}z=\pi\int_0^{\sqrt{3}} r^2\Big|_1^{\sqrt{4-z^2}}\mathrm{d}z$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{3}}(4-z^2-1)\mathrm{d}z=\pi\ (3z-\frac{1}{3}z^3)\Big|_0^{\sqrt{3}}=\pi(3\sqrt{3}-\sqrt{3})=2\sqrt{3}\pi$$

שאלה 7

$$\iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad D=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le z^2,\quad x^2+y^2+z^2\le 1\}$$

אם נעבור לקוארדינטות גליליות נקבל שהתחום הוא:

$$r\le\sqrt{z^2},\quad r\le\sqrt{1-z^2}$$

וזה בהכרח אומר ש $z\in[-1,1]$ (כי אחרת $1-z^2<0$). נקודת החיתוך

$$\sqrt{z^2}=\sqrt{1-z^2}$$

היא כאשר $z=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. כלומר, כאשר z נמצא בתחום $-\sqrt{\frac{1}{2}}\le z\le\sqrt{\frac{1}{2}}$ נקבל ש r נמצא בתחום $0\le r\le\sqrt{z^2}$ ואם $\sqrt{\frac{1}{2}}\le|z|\le 1$ אז r נמצא בתחום $0\le r\le\sqrt{1-z^2}$.
נניח שאנו מסתכלים על התחום שבו $z\ge 0$ (כי המצב בתחום השני סימטרי).
נקבל שהאינטגרל שצריך לחשב הוא:

$$\iiint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\int_0^{z}\int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z+\int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1}\int_0^{\sqrt{1-z^2}}\int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

$$2\pi\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\int_0^{z} r\mathrm{d}r\mathrm{d}z+2\pi\int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1}\int_0^{\sqrt{1-z^2}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$

אחד האינטגרלים הוא:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\int_0^{z} r\mathrm{d}r\mathrm{d}z = \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{1}{2}r^2\Big|_0^z \mathrm{d}z = \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} \frac{1}{2}z^2\mathrm{d}z = \frac{1}{6}z^3\Big|_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{6\sqrt{8}}$$

והשני הוא:

$$\int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1}\int_0^{\sqrt{1-z^2}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}z = \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1} \frac{1}{2}r^2\Big|_0^{\sqrt{1-z^2}} \mathrm{d}z = \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1} \frac{1}{2}(1-z^2)\mathrm{d}z = \frac{z}{2}-\frac{1}{6}z^3\Big|_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{1}$$
$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{6\sqrt{8}} = \frac{1}{3}-\frac{5}{12\sqrt{2}}$$

בסך הכל יתקבל

$$2\pi(\frac{1}{6\sqrt{8}}+\frac{1}{3}-\frac{5}{12\sqrt{2}}) = \frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

בגלל שחישבנו הכל רק עבור $z \geq 0$ צריך להכפיל את התוצאה ב 2 ונקבל:

$$\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

שאלה 8

$$\iint_D ye^{x^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad D = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$$

חישוב פשוט של האינטגרל נותן:

$$\iint_D ye^{x^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^x ye^{x^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2e^{x^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{6}e^{x^3}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}e$$

שאלה 9

$$\iint_D xye^{x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y, \quad 1 \leq x^2-y^2 \leq 9\}$$

נראה סביר לבצע החלפת משתנים

$$u = x, \quad v = x^2 - y^2$$

ראשית נסביר למה זו פונקציה חד חד ערכית. אם נבחר u, v מסוימים נקבל בהכרח ש $x = u$ ו $y^2 = x^2 - v$, בגלל ש $y \geq 0$ זה מחייב $y = \sqrt{x^2 - v}$. כלומר זאת אכן פונקציה חד חד ערכית.
התרגום של התנאים לu, v הוא:

$$0 \leq u \leq 4, \quad 1 \leq v \leq 9, \quad u^2 - v \geq 0$$

נחשב את התשלום של החלפת המשתנים

$$\left| det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & -2y \end{pmatrix} \right| = 2y$$

לכן

$$y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

לכן האינטגרל הוא:

$$\iint\limits_D xe^{x^2-y^2} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_1^9 \int\limits_0^{\sqrt{v}} ue^v \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2} \int\limits_1^9 ve^v \mathrm{d}v =$$

$$\frac{1}{2}(ve^v|_1^9 - \int\limits_1^9 e^v \mathrm{d}v) = \frac{1}{2}(9e^9 - e - e^9 + e) = 4e^9$$

שאלה 10

$$\iint\limits_D \frac{x+3y}{x^4} e^{\frac{y}{x^3}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad D = \{(x, y) \mid x^3 \leq y \leq 4x^3, \quad \frac{1}{2} \leq x + y \leq 1\}$$

נראה מבטיח לבצע החלפה

$$u = x + y, \quad v = \frac{y}{x^3}$$

החלק הכי קשה זה להוכיח שזאת פונקציה חד חד ערכית. נניח ש u, v מספרים כלשהם כך ש $\frac{1}{2} \leq u \leq 1$ ו $1 \leq v \leq 4$ אז x, y שיתאימו להם צריכים לקיים ש

$$y = vx^3$$

ולכן

$$u = x + vx^3$$

כמה x יכולים לפתור את המשוואה הזאת? אם נגזור נקבל

$$vx^2 + 1 > 0$$

ולכן אין לפונקציה נקודות קיצון. זה אומר שהיא חותכת את 0 רק במקום אחד ולכן יש רק פתרון אחד למשוואה.

ממילא יש רק y אחד מתאים כי $y = u - x$.

כעת נחשב את התשלום להחלפת המשתנים

$$\left| det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3\frac{y}{x^4} & \frac{1}{x^3} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{x^3} + 3\frac{y}{x^4} = \frac{x+3y}{x^4}$$

כלומר

$$\frac{x+3y}{x^4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

ולכן האינטגרל הוא:

$$\iint\limits_D e^{\frac{y}{x^3}} \frac{x+3y}{x^4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^4 \int_{\frac{1}{2}}^1 e^v \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_1^4 e^v \mathrm{d}v = \frac{1}{2}(e^4 - e)$$

שאלה 11

$$\iint\limits_D \frac{2x^2 e^{x^2}}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le x\}$$

נבצע החלפת משתנים

$$u = x^2, \quad v = \frac{y}{x}$$

בגלל ש $0 \le x, y$ קל לראות שזו פונקציה חד חד ערכית (אם נבחר u, v מסוימים נקבל ש $x = \sqrt{u}$ ו $y = vx$)

נחשב את התשלום

$$\left| det \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \right| = 2$$

ולכן

$$2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

לכן האינטגרל הוא:

$$\iint\limits_D \frac{x^2e^{x^2}}{x^2+y^2}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D \frac{e^{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^1\int\limits_0^4 \frac{e^u}{1+v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{e^4-1}{1+v^2}\mathrm{d}v = (e^4-1)\arctan v|_0^1 = \frac{\pi}{4}(e^4-1)$$

שאלה 12

$$\iint\limits_D \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad D=\{(x,y)\mid \sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1\}$$

נבצע החלפת משתנים

$$u=\sqrt{x},\quad v=\sqrt{y}$$

ברור שההחלפה חד חד ערכית. נחשב את התשלום:

$$\left|det\begin{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{x}} & 0\\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{y}}\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{4\sqrt{xy}}$$

כלומר

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

לכן האינטגרל הוא

$$\iint\limits_D \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\{0\le u+v\le 1\}} \sqrt{u+v}4uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 4\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-v}\sqrt{u+v}uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\underset{\substack{t=u+v\\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}u}}{=} 4\int\limits_0^1\int\limits_v^1 \sqrt{t}(t-v)v\mathrm{d}t\mathrm{d}v = 4\int\limits_0^1 (\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}vt^{\frac{3}{2}})\Big|_v^1\mathrm{d}v$$

$$= 4\int\limits_0^1(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}v-\frac{2}{5}v^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}v^{\frac{5}{2}})\mathrm{d}v = 4(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}-\frac{4}{35}+\frac{4}{15}) = \frac{92}{105}$$