07.10.14

# 88-112 אלגברה לינארית 1 – קורס קיץ תשע"ד

**פתרון:** מועד א'

## <u>חלק א'</u>

1. (20 נק') הוכיחו את המשפט הבא:

יהי $V$ מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $F$, ויהיו $U,W\subseteq V$ תתי מרחבים.

אזי:

$V=U\oplus W$ **אם ורק אם** לכל $v\in V$ קיימת הצגה יחידה מהצורה $v=u+w$ כאשר $u\in U$ ו $w\in W$.

2. (15 נק') יהי $V$ מרחב וקטורי נוצר סופית, ותהיינה $T,S:V\to V$ העתקות לינאריות, ותהי העתקת הזהות $Id_V:V\to V$.

נניח כי $T\circ S=Id_V$.

א. הוכיחו כי $\ker S=\{0\}$

ב. הוכיחו כי $\ker T=\{0\}$

3. (15 נק') תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{3\times3}$ כך ש $AB\cdot adj(BA)=I$.

א. הוכיחו כי $|AB|=1$

ב. הוכיחו כי $AB=BA$.

## <u>חלק ב'</u>

4. (20 נק') נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix}1&a&3\\1&1&4\\1&a&3+a\\0&1-a&1+a\end{pmatrix}$ ותהי העתקה $T_A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ הנתונה על ידי $T_A(v):=Av$.

א. לאילו ערכי $a$ מתקיים $\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1+a\end{pmatrix}\in\operatorname{Im}(T_A)$?

ב. לאילו ערכי $a$, אם בכלל, ההעתקה $T_A$ חח"ע?

ג. לאילו ערכי $a$, אם בכלל, ההעתקה $T_A$ על?

5. (20 נק') תהי $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -2 \end{pmatrix}$ ויהי $U=R(A)$ מרחב השורות.

תהי מערכת משוואות

$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_4+x_5=0 \\ x_3-x_4-x_5=0 \end{cases}$ ויהי $W$ מרחב הפתרונות שלה.

א. מצאו בסיס ומימד עבור $U\cap W$

ב. מצאו בסיס ומימד עבור $U+W$

6. (20 נק') תהא $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ העתקה לינארית, ויהי בסיס $B=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$.

נתון כי $T(v_1)+T(v_3)=T(v_2)$ , $T(v_1)+T(v_2)=T(v_3)$

א. הוכיחו כי $v_1\in\ker T$

ב. הוכיחו כי $\dim \operatorname{Im} T\le 2$

ג. נתון בנוסף כי $T(v_2)=v_2, T(v_4)=v_1$ מצאו את $[T]_B$

**<u>פתרונות:</u>**

1. הוכחה מההרצאה.
2. 

<u>דרך א'</u>: לפי הנתון המטריצות המייצגות מקיימות $[\mathrm{T}][\mathrm{S}]=[Id_V]=\mathrm{I}$ .

כיוון שמדובר במטריצות ריבועיות, נובע ש $[T]$ ו $[S]$ הפיכות.

לכן $T,S$ הן איזומורפיזמים, ובפרט חח"ע.

לכן $\ker T=\ker S=\{0\}$

<u>דרך ב'</u>: $T\circ S$ היא העתקה הזהות ולכן חח"ע ועל.

מבדידה (או הוכחה ישירה) אנו מסיקים כי $S$ חח"ע ו $T$ על.

לכן $\ker S=\{0\}$ (סעיף א') וגם $\operatorname{Im}T=V$ .

כעת לפי משפט הדרגה, $\dim\ker T+\dim\operatorname{Im}T=\dim V$

ביחד יוצא ש $\dim\ker T=0$ ולכן $\ker\mathrm{T}=\{0\}$

3. א. נכפול את שני אגפי המשוואה ב $BA$ ונקבל

$AB\cdot adj(BA)\cdot \mathrm{BA}=BA$

לפי משפט $adjA\cdot A=A\cdot adjA=|A|I$

לכן $AB\cdot|BA|I=BA$

נבצע דטרמיננטה לשני אגפי המשוואה,

ונשים לב שעבור מטריצה ריבועית מסדר 3 מתקיים $|\alpha I|=\alpha^3 I$

לכן $|AB|\left(|BA|\right)^3=|BA|$

נזכור כי $|AB|=|BA|=|A|\cdot|B|$ .

כיוון ש $AB\cdot adj(BA)=I$ , נובע ש $AB$ הפיכה ולכן $|AB|\neq 0$ .

לכן מותר לחלק ב $|AB|$ על מנת לקבל $\left(|BA|\right)^3=1$

ולכן $|BA|=|AB|=1$

ב. נחזור אל המשוואה שמצאנו, $AB\cdot|BA|I=BA$

נציב $|BA|=1$ ונקבל את המשל $AB=BA$ .

## שאלה 4

נתונה מטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & a & 3+a \\ 0 & 1-a & 1+a \end{pmatrix}$ ותהי העתקה $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ הנתונה ע"י $T_A(v) := Av$.

1. לאילו ערכי $a$ מתקיים $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1+a \end{pmatrix} \in Im(T_A)$ ?
2. לאילו ערכי $a$, אם בכלל, ההעתקה $T_A$ חח"ע?
3. לאילו ערכי $a$, אם בכלל, ההעתקה $T_A$ על?

## פתרון

1. השאלה שקולה לשאלה האם הוקטור נמצא במרחב העמודות של המטריצה $A$, כלומר שעלינו למצוא מתי יש פתרון למע' הבאה: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & a & 3+a & 2 \\ 0 & 1-a & 1+a & 1+a \end{array}\right)$. נדרג ונגיע ל־ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & 0 \\ 0 & 1-a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{array}\right)$. למע' זו יש פתרון רק אם $a = 2$.

2. השאלה שקולה לשאלה מתי למע' ההומוגנית $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & a & 3+a & 0 \\ 0 & 1-a & 1+a & 0 \end{array}\right)$ יש פתרון יחיד (הפתרון הטריוויאלי). נדרג ונקבל $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & 0 \\ 0 & 1-a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ ולזה יש פתרון יחיד רק אם $a \neq 0, 1$.

3. לפי משפט הדרגה $dim\mathbb{R}^3 = dimKerT_A + dimImT_A$ כלומר ש־ $dimImT_A = 3 - dimKerT_A$. אם $T_A$ הייתה על אז $ImT_A = \mathbb{R}^4$ שהוא ממימד 4 וזה בלתי אפשרי (כי המימד של הגרעין אי שלילי). ולכן אין ערכי $a$ עבורם ההעתקה היא על.

.5
תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

ויהי $U = R(A)$ מרחב השורות של $A$. תהי מערכת משוואות

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_4 + x_5 &= 0 \\ x_3 - x_4 - x_5 &= 0 \end{aligned}$$

ונסמן ב $W$ את מרחב הפתרונות שלה. מצאו בסיס ומימד ל $U \cap W$ ול $U + W$.
פתרון: לפי הנתון, קל למצוא בסיס ל $U$

$$U =^{\{} (1, 2, -1, 2, 0), (0, 0, 1, 3, 1)\}$$

(מיידי לראות שהוקטור השלישי במטריצה נפרש על ידי האחרים)
נמצא בסיס ל $W$ ע"י פתרון המערכת ההומוגנית

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

קל לראות שהפתרון הוא: $x_5 = t$ $x_4 = s$ $x_3 = s+t$ $x_2 = r$ ו $x_1 = -2r-4s-t$כלומר:

$$(-2r - 4s - t, r, s + t, s, t) = r(-2, 1, 0, 0, 0) + s(-4, 0, 1, 1, 0) + t(-1, 0, 1, 0, 1)$$

כך שקיבלנו גם בסיס עבור $W$. נתחיל לחפש בסיס לחיתוך:
נבצע השוואת span־ים בין $U$ ל $W$ ונקבל:

$$a(1, 2, -1, 2, 0)+b(0, 0, 1, 3, 1) = r(-2, 1, 0, 0, 0)+s(-4, 0, 1, 1, 0)+t(-1, 0, 1, 0, 1)$$

נקבל מערכת משוואות:

$$\begin{aligned} a + 2r + 4s + t &= 0 \\ 2a - r &= 0 \\ -a + b - s - t &= 0 \\ 2a + 3b - s &= 0 \\ b - t &= 0 \end{aligned}$$

אפשר בשלב הזה לצמצם קצת את המערכת אם לוקחים $b = t$ $\quad r = 2a$ אבל בואו נלך בגישה ישירה. כלומר צריך לדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

נבצע $R_2 = R_2 - 2R_1$, $R_3 = R_3 + R_1$, $R_4 = R_4 - 2R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -8 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -9 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

נבצע $R_2 \leftrightarrow R_5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

נבצע $R_3 = R_3 - R_2$, $R_4 = R_4 - 3R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

נבצע $R_4 = R_4 + 2R_3$, $R_5 = R_5 + \frac{5}{2}R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ואם נבצע $R_5 = R_5 - \frac{1}{6}$ נקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נסמן $t = z$ ואז נקבל

$$s = z \quad 2r + 3z + z = 0$$

כלומר

$$t = z, \quad s = z, \quad r = -2z$$

ואם נציב את זה ב span שיש למעלה נקבל

$$-2z(-2,1,0,0,0) + z(-4,0,1,1,0) + z(-1,0,1,0,1) = z(-1,-2,2,1,1)$$

כלומר $(-1,-2,2,1,1)$ בסיס לחיתוך והמימד הוא 1.
נעבור לטפל בסכום $U+W$: ברור לנו ש:

$$U+W=\operatorname{span}\{(1,2,-1,2,0),(0,0,1,3,1),(-2,1,0,0,0),(-4,0,1,1,0),(-1,0,1,0,1)\}$$

אבל זה לא בסיס. אנחנו יודעים לפי משפט המימדים ש

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim V-\dim(U\cap W)=2+3-1=4$$

לכן יש פה וקטור תלוי לינארית. אחת השיטות למצוא אותו היא לשים את הוקטורים בעמודות מטריצה ולדרג ואז נקבל דירוג דומה לדירוג שעשינו קודם ונקבל שבמטריצה המדורגת, בעמודה ה 5 לא יהיה איבר מוביל ולכן אפשר לזרוק את הוקטור ה 5 כלומר:

$$\{(1,2,-1,2,0),(0,0,1,3,1),(-2,1,0,0,0),(-4,0,1,1,0)\}$$

הוא בסיס ל $U+W$

# פתרון שאלה 6

## 1 באוקטובר 2014

1. נראה ש $T(v_1)=0$. מתקיים $T(v_3)=T(v_1)+T(v_2)$ ו $T(v_1)+T(v_3)=T(v_2)$. מקבלים: $T(v_1)=T(v_3)-T(v_2)=T(v_2)-T(v_3)$ ומכאן $T(v_1)=-T(v_1)$ שזה אומר ש $T(v_1)=0$.

2. מכיוון ש $T(v_1)=0$ השוויונות הקודמים נותנים לנו, $T(v_2)=T(v_3)$ ולכן $T(v_2-v_3)=T(v_2)-T(v_3)=0$. וקטורים $v_1,v_2-v_3$ הם בת"ל ושניהם בגרעין של $T$. מכאן שהמימד של הגרעים הוא לפחות 2. ומכיוון ש $\dim kerT+\dim ImT=\dim\mathbb{R}^4=4$ מקבלים $\dim ImT\le 4-2=2$.

3. נזכר שהעמודה ה-$i$ של $[T]_B$ היא $[T(v_i)]_B$. מתקיים:

   א) $$T(v_1)=0\Rightarrow[T(v_1)]_B=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

   ב) $$T(v_2)=T(v_3)=v_2\Rightarrow[T(v_2)]_B=[T(v_3)]_B=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

   ג) $$T(v_4)=v_1\Rightarrow[T(v_4)]_B=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ולכן $$[T(v_1)]_B=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$