פתרון תרגיל 6 בדידה

1. (א) נגדיר: $f(n)=n$. זו פונקציה חח"ע: אם $n_1\neq n_2$ בוודאי $f(n_1)\neq f(n_2)$.

(ב) נגדיר: $f(n)=|n|+1$. זו פונקציה על, כי לכל $n\in\mathbb{N}$, $n-1\in\mathbb{Z}$ מקיים $f(n-1)=n$.

(ג) נגדיר:

$$f(n)=\begin{cases}2n+1 & n\geq 0\\ -2n & n<0\end{cases}$$

הפונקציה חח"ע; אם $f(a)=f(b)=2k$ עבור k טבעי נקבל $a=b=-k$.
אם $f(a)=f(b)=2k+1$ עבור k טבעי, נקבל $a=b=k$.
בכל מקרה $f(a)=f(b)\Longrightarrow a=b$ ולכן הפונקציה חח"ע.

(ד) נגדיר:

$$f(n)=\begin{cases}k & n=2k\\ -k+1 & n=2k-1\end{cases}$$

הפונקציה על; יהי $n\in\mathbb{Z}$. אם $n\in\mathbb{Z}$ חיובי, $f(2n)=n$. אם $n\in\mathbb{Z}$ אי-חיובי, $f(-2n+1)=n$. בכל מקרה קיים $x\in\mathbb{N}$ המקיים $f(x)=n$ והפונקציה על.

2. (א) קיימת $f:A\to B$ חח"ע. A לא ריקה, ולכן קיים $x\in A$.
כעת, נגדיר $g:B\to A$ באופן הבא. אם קיים $a\in A$ עבורו $f(a)=b$, אז $g(b)=a$. אחרת, $g(b)=x$. כלומר:

$$g(b)=\begin{cases}a & b=f(a)\\ x & otherwise\end{cases}$$

ראשית, נשים לב שזו אכן פונקציה; מכיוון שהפונקציה f חח"ע, לכל b קיים לכל היותר $a\in A$ יחיד המקיים $f(a)=b$, ולכן g באמת מוגדרת היטב.
שנית, הפונקציה g על, מכיוון שלכל $a\in A$ קיים $b\in B$ עבורו $f(a)=b$ (כי f היא פונקציה), לכל $a\in A$ אותו ה$-b$ מקיים: $g(b)=a$.

(ב) קיימת $f:A\to B$ על.
כלומר, לכל $b\in B$ קיים $a\in A$. כעת, לכל $b\in B$ נבחר $a\in A$ ספיציפי המקיים $f(a)=b$ (אקסיומת הבחירה אומרת שבחירה כזו אכן אפשרית), ונגדיר $g:B\to A$ על ידי:

$$g(b)=a$$

ראשית, לכל b אכן יש a כזה, כפי שראינו, ומכיוון שבחרנו אחד ספיציפי נקבל ש$-g$ אכן פונקציה.
שנית, אם $b_1\neq b_2$ אז $g(b_1)\neq g(b_2)$ (אחרת קיים $a\in A$ המקיים $f(a)=b_1$ וגם $f(a)=b_2$ בסתירה לכך ש$-f$ פונקציה) ולכן g חח"ע.

3. (א) נגדיר $f:2\mathbb{N}\to\mathbb{Z}_{<0}$ על ידי: $f(n)=-\frac{n}{2}$. הפונקציה על; לכל $x\in\mathbb{Z}_{<0}$, $-2x\in 2\mathbb{N}$ מקיים $f(-2x)=x$.
הפונקציה חח"ע; אם $x,y\in 2\mathbb{N}$, $x\neq y$ אז $-\frac{x}{2}\neq-\frac{y}{2}$, כלומר $f(x)\neq f(y)$.
מצאנו פונקציה חח"ע ועל ולכן הקבוצות שוות עוצמה.

(ב) נגדיר $f:2\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ על ידי:

$$f(n)=\left\{\begin{array}{cc}\frac{n}{4} & n=4k\\ -\frac{n-2}{4} & n=4k-2\end{array}\right.$$

הפונקציה על; יהי $x\in\mathbb{Z}$. אם $x>0$, $4x\in 2\mathbb{N}$ מקיים: $f(4x)=x$. אם $x\leq 0$, $-4x+2\in 2\mathbb{N}$ מקיים: $f(-4x+2)=x$. בכל אופן קיים $y\in\mathbb{N}$ המקיים $f(y)=x$ ולכן הפונקציה על.
הפונקציה חח"ע; יהיו $a,b\in 2\mathbb{N}$ עבורם $f(a)=f(b)$. אם $f(a)=f(b)>0$, $a=b=4f(a)$. אם $f(a)=f(b)\leq 0$, $a=b=-4f(a)+2$.
בכל מקרה, $f(a)=f(b)\Longrightarrow a=b$ ולכן הפונקציה חח"ע.
מצאנו פונקציה חח"ע ועל ולכן הקבוצות שוות עוצמה.

(ג) נגדיר $f:P\to A$ באופן הבא: אם p הוא הראשוני ה-n, אז:

$$f(p)=\left\{\begin{array}{cc}-n & n=2k-1\\ n-1 & n=2k\end{array}\right.$$

למשל, 2 הוא הראשוני ה-1, 1 הוא אי-זוגי ולכן $f(2)=-1$. 7 הוא הראשוני ה-4, 4 הוא זוגי ולכן $f(7)=3$.
הפונקציה על; יהי $x\in A$. אם $x>0$ אז p הראשוני ה-$x+1$ מקיים $f(p)=x$.
אם $x<0$ אז p הראשוני ה-$-x$ מקיים $f(p)=x$. בכל אופן קיים $p\in P$ המקיים $f(p)=x$ ולכן הפונקציה על.
הפנקציה חח"ע; לכל ראשוני יש את המיקום שלו, ולכן לראשוניים שונים יש תמונות שונות.
מצאנו פונקציה חח"ע ועל ולכן הקבוצות שוות עוצמה.

4. תהי $f:A\to B$ חח"ע ועל. נגדיר $F:P(A)\to P(B)$ על ידי: $F(C)=f[C]$, כאשר:

$$f[C]=\{f(x)\,|x\in C\}$$

הפונקציה חח"ע; עבור $C_1,C_2\in P(A)$ המקיימות $C_1\neq C_2$, בה"כ קיים $x\in C_1$ המקיים $x\notin C_2$. $f(x)\in f[C_1]$, ומכיוון שהפונקציה f חח"ע לא קיים $y\in C_2$ המקיים $f(y)=f(x)$ ולכן $f(x)\notin f[C_2]$. אם כן, $f[C_1]\neq f[C_2]$. לפיכך, $C_1\neq C_2\Longrightarrow F(C_1)\neq F(C_2)$ ולכן F חח"ע.
הפונקציה על; תהי $D\in P(B)$. מכיוון שהפונקציה f על לכל $y\in D$ קיים $a\in A$ המקיים $f(a)=y$. נגדיר: $C=\{a\in A|\exists b\in D:f(a)=b\}$ ונקבל: $f[C]=D$, כלומר $C\in P(A)$ מקיימת $F(C)=D$ ולכן הפונקציה על.
סה"כ F אכן חח"ע ועל.

5. נגדיר פונקציה $F:A^{B\times C}\to\left(A^B\right)^C$ באופן הבא:

$$F(f)(b,c)=f(b)(c)$$

לפונקציה F יש הופכית, המוגדרת על ידי:

$$F^{-1}(g)(b)(c) = g(b,c)$$

הפונקציה הפיכה ולכן חח"ע ועל.
מבחינת הסימון: F היא פונקציה של פונקציות, ולכן $F(f)$ היא פונקציה; $F(f)(b,c)$ זו הפונקציה $F(f)$ שהצבנו בה (b,c).