אנליזה 1 למורים- פתרון תרגיל 5

חשבו את הגבולות של הסדרת הבאות באמצעות מבחן המנה:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$

פתרון

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(n+1)}{n\cdot 2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(n+1)}{n\cdot 2\cdot 2^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

ולכן לפי מבחן המנה: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2^n\cdot n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}\cdot(n+1)^2}}{\frac{n!}{2^n\cdot n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot 2^n(n+1)!}{n!\cdot 2^{n+1}\cdot(n+1)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cdot 2^n\cdot n!\cdot(n+1)}{n!\cdot 2\cdot 2^n\cdot(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}\right)} = \infty$$

ולכן לפי מבחן המנה:_ $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2^n \cdot n^2} = \infty$

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}}{3^{4n}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{(n+1)^2}}{3^{4n+4}}}{\frac{2^{n^2}}{3^{4n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{4n} \cdot 2^{(n+1)^2}}{3^{4n+4} \cdot 2^{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{4n} \cdot 2^{n^2+2n+1}}{3^{4n} \cdot 3^4 \cdot 2^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2+2n+1}}{3^4 \cdot 2^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2} \cdot 2^{2n+1}}{3^4 \cdot 2^{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^4} = \infty$$

ולכן לפי מבחן המנה: $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}}{3^{4n}} = \infty$