89-132 אינפי 1 מדמ"ח – פתרון מועד א' תש"ף – 23.02.20

מרצים: מר אלעד עטייא, דר' ארז שיינר

מתרגלים: ניקול בלשוב, טל הרשקו, אמונה ליפסקר, עקיבה מלכה, דורון פרלמן

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הוראות: יש לענות על **כל** 5 השאלות, יש לנמק ולהוכיח היטב כל טענה.

יש לכתוב את התשובה לכל שאלה על טופס המבחן, מיד לאחר השאלה.

כל שאלה שווה 22 נק' סה"כ הניקוד המקסימלי 110 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל100).

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin(x)}{x^2-\ln(x)}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin(x)}{x^2-\ln(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}\cdot\frac{1+\frac{\sin(x)}{x}}{1-\frac{\ln(x)}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1+\frac{\sin(x)}{x}}{1-\frac{\ln(x)}{x^2}}=0$$

כאשר $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)}{x}=0$ כי מדובר בחסומה חלקי שואפת לאינסוף, ו$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}=0$ לפי משפט סדרי גודל, או לפי כלל לופיטל.

ב. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x\cdot cos\left(\frac{1}{x}\right)}$

ראשית $\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$ ולכן בסיס החזקה שואף ל1, ולכן מותר להשתמש בכלל:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x\cdot cos\left(\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}xcos\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right)}=e^1=e$$

כיוון שהגבול במעריך הוא:

$$\lim_{x\to\infty}xcos\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}cos\left(\frac{1}{x}\right)=1$$

ג. $\lim_{x\to 0^+}(e^x - e^{-x})^{\sin(x)}$

ראשית נשים לב שמדובר במקרה בעייתי מהצורה 0^0 ולכן נפעיל e בחזקת ln:

$$\lim_{x\to 0^+}(e^x - e^{-x})^{\sin(x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sin(x)\ln(e^x - e^{-x})} = e^0 = 1$$

כיוון שהגבול במעריך הוא:

$$\lim_{x\to 0^+}\sin(x)\ln(e^x - e^{-x}) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x}x\ln(e^x - e^{-x})$$

ידוע כי $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ ולכן נותר לנו לחשב את הגבול

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(e^x - e^{-x}) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^x - e^{-x})}{\frac{1}{x}} = \left\{\frac{-\infty}{\infty}, L'Hopital\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(e^x + e^{-x})\frac{x^2}{e^x - e^{-x}} = 2\cdot 0 = 0$$

כיוון ש

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{e^x - e^{-x}} = \left\{\frac{0}{0}, L'Hopital\right\} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{e^x + e^{-x}} = 0$$

.2

א. תהיינה $\emptyset \neq S \subseteq T \subseteq \mathbb{R}$ קבוצות חסומות מלעיל. הוכיחו כי $\sup(S) \leq \sup(T)$

ראשית, כיוון שמדובר בקבוצות ממשיות לא ריקות וחסומות מלעיל, יש להן חסמים עליונים $\sup(S)$, $\sup(T)$.

כעת, $\sup(T)$ הוא החסם העליון של הקבוצה T, ולכן לכל $t \in T$ מתקיים כי $t \leq \sup(T)$.

כיוון ש$S \subseteq T$, בפרט לכל $s \in S$ מתקיים כי $s \leq \sup(T)$ ולכן $\sup(T)$ הוא חסם מלעיל של הקבוצה S.

כיוון ש$\sup(S)$ הוא חסם המלעיל הקטן ביותר של S, נובע כי $\sup(S) \leq \sup(T)$.

ב. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[-1,1]$. הוכיחו שקיים פתרון למשוואה $f(c)=\frac{c}{1-c^2}$.

נתחיל בלהעביר אגף ולבנות פונקציה $h(x)=f(x)-\frac{x}{1-x^2}$.

כעת, נחשב גבולות בקצוות הקטע:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)-\frac{x}{1-x^2}=f(-1)+\infty=\infty$$

כאן השתמשנו בעובדה שהפונקציה f רציפה בקטע הסגור $[-1,1]$.

באופן דומה

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)-\frac{x}{1-x^2}=f(1)-\infty=-\infty$$

לכן קיימות בקטע הפתוח $(-1,1)$ נקודות a,b כך ש $h(a)>0, h(b)<0$.

הפונקציה $h(x)$ רציפה בקטע בין a,b כצירוף של רציפות, ולכן לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה c עבורה $h(c)=0$ כפי שרצינו.

3. לכל אחד מן הטורים הבאים קבעו הם הוא מתכנס בהחלט/ בתנאי/ מתבדר:

א.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$$

נוכיח שהטור **<u>מתבדר</u>**:

ראשית נפתח את הסדרה ע"י כפל בצמוד:

$$\sqrt{n^2+1}-n=\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

ולכן קל לראות שמדובר בטור חיובי.

כעת נבצע מבחן השוואה גבולי עם הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

$$\lim\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim\frac{n}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

לכן הטורים חברים, וכיוון שהטור ההרמוני מתבדר כך גם הטור בשאלה שלנו.

ב.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln\left(n^{\sqrt{n}}\right)}$$

נוכיח שהטור **<u>מתכנס בתנאי</u>**:

ראשית נבדוק התכנסות בהחלט:

$$\frac{1}{\ln\left(n^{\sqrt{n}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$$

נבצע מבחן השוואה גבולי עם הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\lim \frac{n}{\sqrt{n}\ln(n)} = \lim \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} = \infty$$

לפי משפט סדרי הגודל או באמצעות כלל לופיטל.

לכן הטור בערך מוחלט גדול באופן גבולי מהטור ההרמוני, ולכן מתבדר ואין לנו התכנסות בהחלט.

כעת, ברור שכאשר n גדל גם $\sqrt{n}\ln(n)$ גדל, וכמו כן ברור ש$\sqrt{n}\ln(n) \to \infty$ ולכן הסדרה $\frac{1}{\ln\left(n^{\sqrt{n}}\right)}$ מונוטונית יורדת לאפס. לכן לפי מבחן לייבניץ הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln\left(n^{\sqrt{n}}\right)}$ מתכנס, וסה"כ כיוון שהוא לא התכנס בהחלט הוא מתכנס בתנאי.

ג.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n) \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

נוכיח כי הטור **<u>מתכנס בהחלט</u>**:

נשים לב כי $\left|\cos(n)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right| \le \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

ולכן לפי מבחן ההשוואה הראשון מספיק להוכיח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ מתכנס, ולכן גם הטור שלנו יתכנס בהחלט.

נפעיל את מבחן השורש על טור חיובי זה ונקבל כי

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1$$

ואכן לפי מבחן השורש הטור הזה מתכנס.

4.

א. מצאו קבוע $a \in \mathbb{R}$ עבורו למשוואה $e^x = x + a$ יש פתרון יחיד, הוכיחו תשובתכם.

נעביר אגף ונבנה פונקציה $h(x) = e^x - x - a$.

נחקור את הפונקציה:

$$h'(x) = e^x - 1$$

הנגזרת שלילית בשליליים, וחיובית בחיוביים, כלומר הפונקציה h יורדת בתחום $(-\infty, 0]$ ועולה בתחום $[0, \infty)$.

כיוון שהפונקציה יורדת עד $x = 0$ ועולה אחריו, לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $h(x) \geq h(0) = 1 - a$.

לכן אם $1 - a = 0$ נקבל בדיוק חיתוך יחיד עם ציר הx בנקודה $x = 0$ (אחריו ולפניו ערך הפונקציה גדול יותר).

כלומר סה"כ התשובה היא $a = 1$.

ב. הוכיחו/הפריכו: לכל פונקציה $f(x)$ הרציפה בכל $\mathbb{R}$ קיים פתרון למשוואה $f(f(x)) = x$.

אפשרות הקשורה לסעיף א':

נפריך ע"י $f(x) = e^x$.

בסעיף קודם הוכחנו כי $e^x - x - 1 \geq 0$ בכל הממשיים, ולכן $e^x \geq x + 1$.

לכן

$$f(f(x)) = e^{(e^x)} \geq e^x + 1 \geq x + 2 > x$$

אפשרות פשוטה אחרת:

נפריך ע"י $f(x) = x + 1$.

נציב ונקבל:

$$f(f(x)) = f(x + 1) = x + 2 > x$$

5. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n}$, ותנאי ההתחלה $a_1 = 1$.

א. הוכיחו כי תתי הסדרות a_{2n+2}, a_{2n+1} הן מונוטוניות.

מומלץ להציב כמה איברים ראשונים בסדרה על מנת להכיר אותה קצת:

$$1,3,\frac{5}{3},\frac{11}{5},\dots$$

כלומר נדמה שתת הסדרה של האיברים במקומות הזוגיים יורדת, ובמקומות האי זוגיים עולה.

לצורך טיפול נוח באי שיוויונים, נוכיח באינדוקציה כי a_n סדרה חיובית.

בסיס האינדוקציה – אכן $a_1 = 1 > 0$.

כעת, יהי n עבורו $a_n > 0$ אזי $a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n} \geq 1 > 0$ כפי שרצינו.

כעת, נשים לב כי:

$$a_{n+2} = 1 + \frac{2}{a_{n+1}} = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{a_n}}$$

נוכיח כי a_{2n+2} יורדת באינדוקציה לכל $n \geq 0$, כלומר צ"ל כי $a_{2n+2} \geq a_{2(n+1)+2} = a_{2n+4}$

עבור $n = 0$ אכן $a_2 = 3 \geq \frac{11}{5} = a_4$.

יהי n עבורו $a_{2n+2} \geq a_{2n+4}$

צ"ל להוכיח $a_{2n+4} \geq a_{2n+6}$.

לפי הצבה בנוסחא שפיתחנו לעיל, צ"ל כי:

$$1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{a_{2n+2}}} \geq 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{a_{2n+4}}}$$

נצמצם את ה1 ונחלק ב2, ונקבל שזה נכון אם ורק אם:

$$\frac{1}{1 + \frac{2}{a_{2n+2}}} \geq \frac{1}{1 + \frac{2}{a_{2n+4}}}$$

כיוון ששני האגפים חיוביים, זה נכון אם ורק אם

$$1 + \frac{2}{a_{2n+2}} \leq 1 + \frac{2}{a_{2n+4}}$$

ושוב באופן דומה, נקבל שזה נכון אם ורק אם $a_{2n+2} \geq a_{2n+4}$ שזו הנחת האינדוקציה.

ההוכחה שתת הסדרה של האי זוגיים עולה דומה.

ב. הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת לגבול סופי.

הוכחנו בסעיף א' שתת הסדרה a_{2n} היא יורדת, וחיובית.

(גם אם לא הצלחתם בסעיף א', בסעיף ב' אפשר להתחיל מנקודת הנחה שזה נכון.)

לכן תת הסדרה a_{2n} מונוטונית וחסומה (היא יורדת וחסמנו אותה מלמטה ע"י אפס), ולכן מתכנסת לגבול סופי L.

נשאיף את שני צידי נוסחאת הנסיגה:

$$a_{2n+2} = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{a_{2n}}}$$

ונקבל כי $L = 1 + \frac{2}{1+\frac{2}{L}}$

נפשט ונקבל כי $L^2 - L - 2 = 0$ שזו משוואה עם שני פתרונות $L = -1,2$.

כיוון שהסדרה חיובית לא ייתכן שהגבול שלה שלילי ולכן סה"כ $a_{2n} \to 2$.

ניתן להוכיח שתת הסדרה של האיברים במקומות האי זוגיים חסומה מלמעלה באינדוקציה, אך נציג כאן פתרון אלגנטי ומהיר:

$$a_{2n+1} = 1 + \frac{2}{a_{2n}} \to 1 + \frac{2}{2} = 2$$

כעת, כיוון שתת הסדרה של האיברים במקומות הזוגיים, ותת הסדרה של האיברים במקומות האי זוגיים (שביחד מכסות את כל איבר הסדרה) שואפות שתיהן לאותו הגבול, סה"כ הסדרה כולה מתכנסת לגבול הסופי 2.