תורת המשחקים – שיעור 9

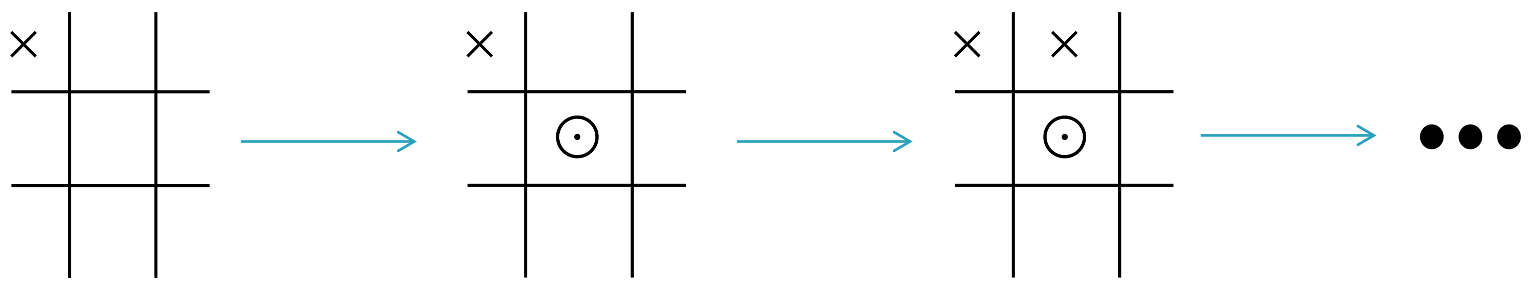
משחקים בצורה רחבה

נפרדים ממשחקים בצורה אסטרטגית

- **במשחקים בצורה אסטרטגית:**
  - השחקנים בוחרים אסטרטגיות במקביל ובצורה בלתי תלויה.
  - מייד לאחר מכן מסתיים המשחק.
- **נרצה לדון במשחקים מסוג אחר:**
  - השחקנים משחקים לפי תורות.
  - לכל שחקן יש מספר תורות.
  - יש כללים ברורים כיצד אמור להסתיים המשחק.
- למשחקים כנ"ל קוראים ***משחקים בצורה רחבה***.
- (לעיתים ניתן לנתח אותו המשחק בשתי הצורות.)

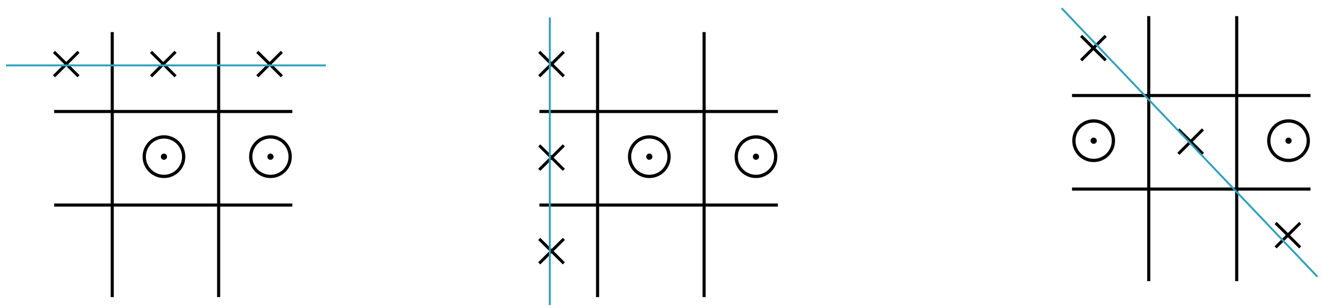
דוגמה: איקס-עיגול

- ישנם שני שחקנים:
  - שחקן I הוא X
  - שחקן II הוא O
- השחקנים משחקים לפי תור כאשר שחקן I משחק ראשון.
- כל שחקן צריך לבחור משבצת ריקה על לוח משבצות 3x3 ולשים בו את הסימן שלו (X או O).



דוגמה: איקס-עיגול

- המשחק מסתיים כאשר:
  - שחקן I משלים שורה או עמודה או אלכסון של X-ים – **שחקן I מנצח**.



  - שחקן II משלים שורה או עמודה או אלכסון של O-ים – **שחקן II מנצח**.
  - כל משבצות הלוח מלאות (ולא מתקיים אחד מהקודמים) – המשחק מסתיים **בתיקו**.

דוגמה: איקס-עיגול

- נשים לב שהאסטרטגיות העומדות בפני כל שחקן משתנות מתור לתור – בכל תור מספר המשבצות הפנויות שונה.
- ישנן 3 תוצאות אפשריות למשחק, שאפשר לתאר בעזרת פונקצית תועלת לכל שחקן.

$$u_I(\text{"}\times\ \text{wins"}) = 1 \qquad u_{II}(\text{"}\times\ \text{wins"}) = -1$$

$$u_I(\text{"}\odot\ \text{wins"}) = -1 \qquad u_{II}(\text{"}\odot\ \text{wins"}) = 1$$

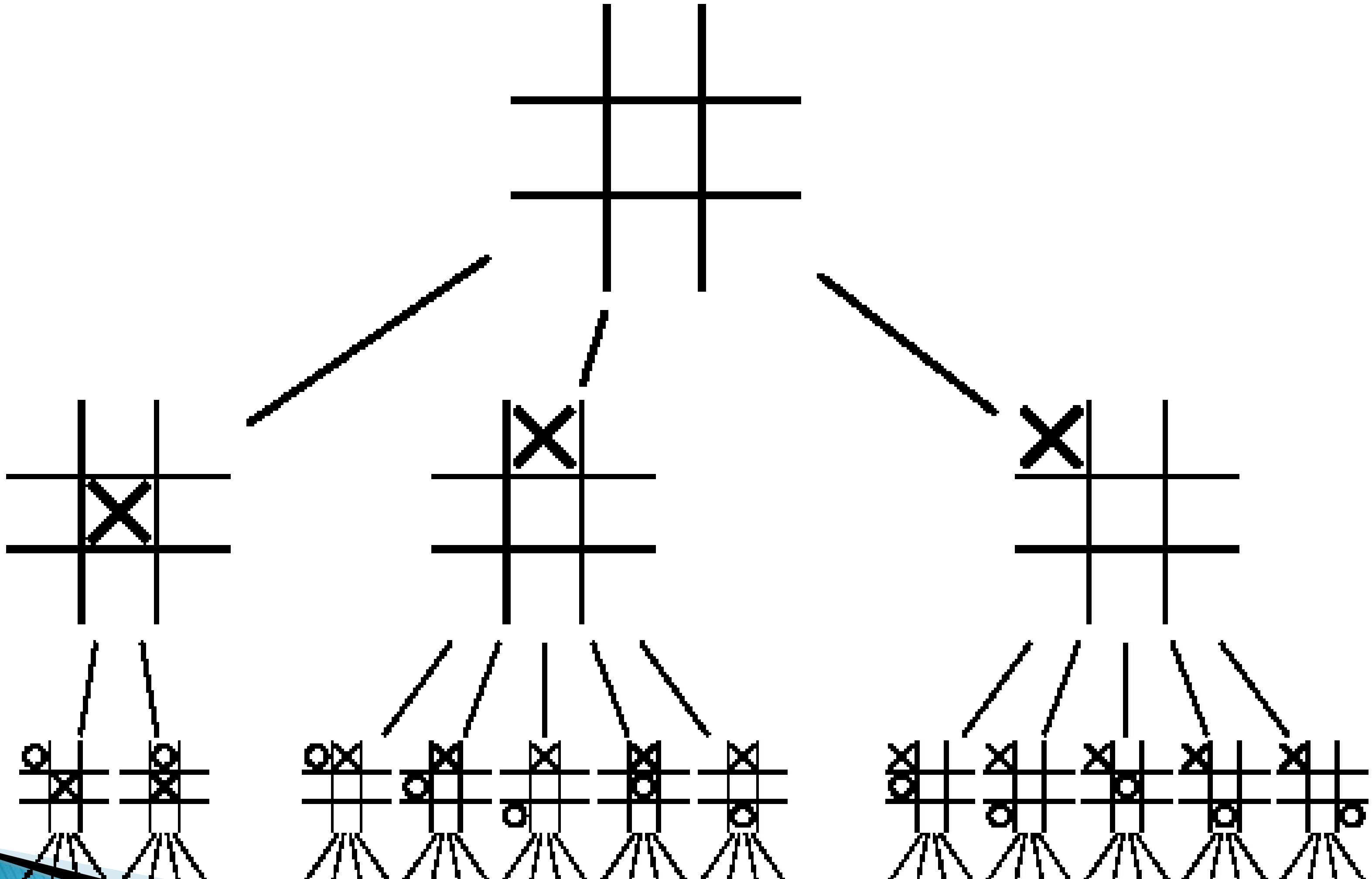
$$u_I(\text{"draw"}) = 0 \qquad u_{II}(\text{"draw"}) = 0$$

- ניתן לזהות שבמושגים בהם דנו בשיעורים קודמים, מדובר ב***משחק סכום אפס***.

דוגמה: איקס-עיגול

- הבעיה בפונקציות התועלת הנ"ל הוא שלא ניתן לנתח את המשחק לפיהן.
- אנחנו רוצים מושג מקביל ל***אסטרטגיות*** שראינו במשחקים בצורה אסטרטגית.
- לשם כך נציג את ***עץ המשחק***

דוגמה: איקס-עיגול



עץ המשחק

- כל ***קדקד*** בעץ מייצג מצב במשחק.
- לא רק את מצב הלוח, אלא את <u>כל הצעדים שהובילו אל המצב</u>.
- לכן יש כפילויות של מצבי הלוח בעץ.
- כל קדקד שייך לאחד השחקנים (כלומר קדקד שייך לשחקן אם כעת זהו תורו).
- כל ***קשת*** שיוצאת מקדקד אל אחד מבניו (כלפי מטה) מתארת ***מהלך*** של שחקן.
- ניתן לתאר סדרה של מהלכים ע"י סדרה של קדקדים

$$(x^1, x^2, \ldots., x^n)$$

עץ המשחק (המשך)

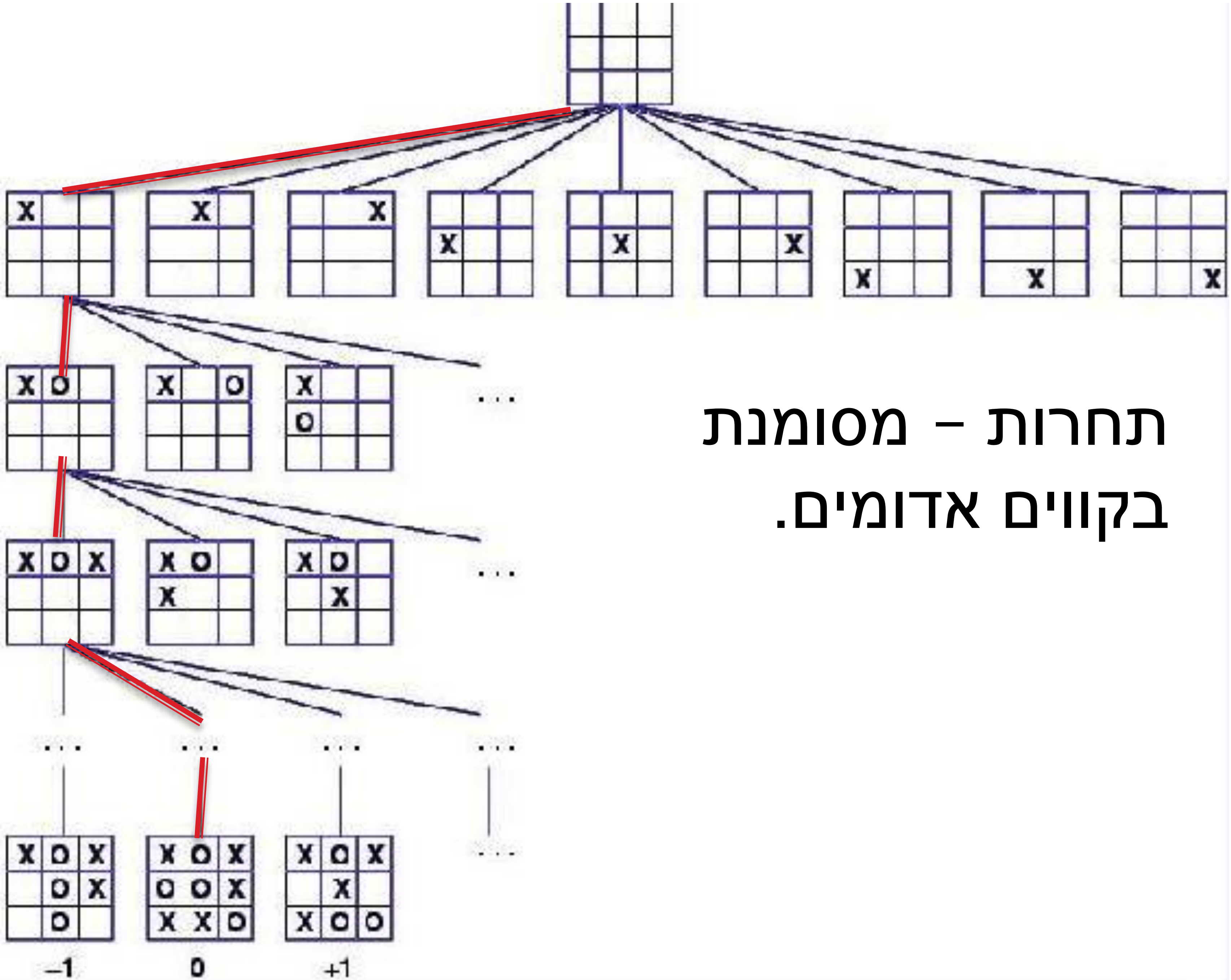
- כל ***עלה*** בעץ מייצג סיום של משחק. לדוגמה

מייצגים עלים של עץ המשחק באיקס-עיגול (נזכיר שוב שיש כפילויות בגרף, ניתן להגיע לכל מצב של הלוח בכמה דרכים).

- סדרה "תקינה" של קדקדים

$$(x^0, x^1, \ldots, x^n)$$

המתחילה בראש העץ ומסתיימת בעלה נקראת ***תחרות*** ומייצגת משחק שלם של שני שחקנים.



תחרות – מסומנת בקווים אדומים.

תכונות של עץ המשחק

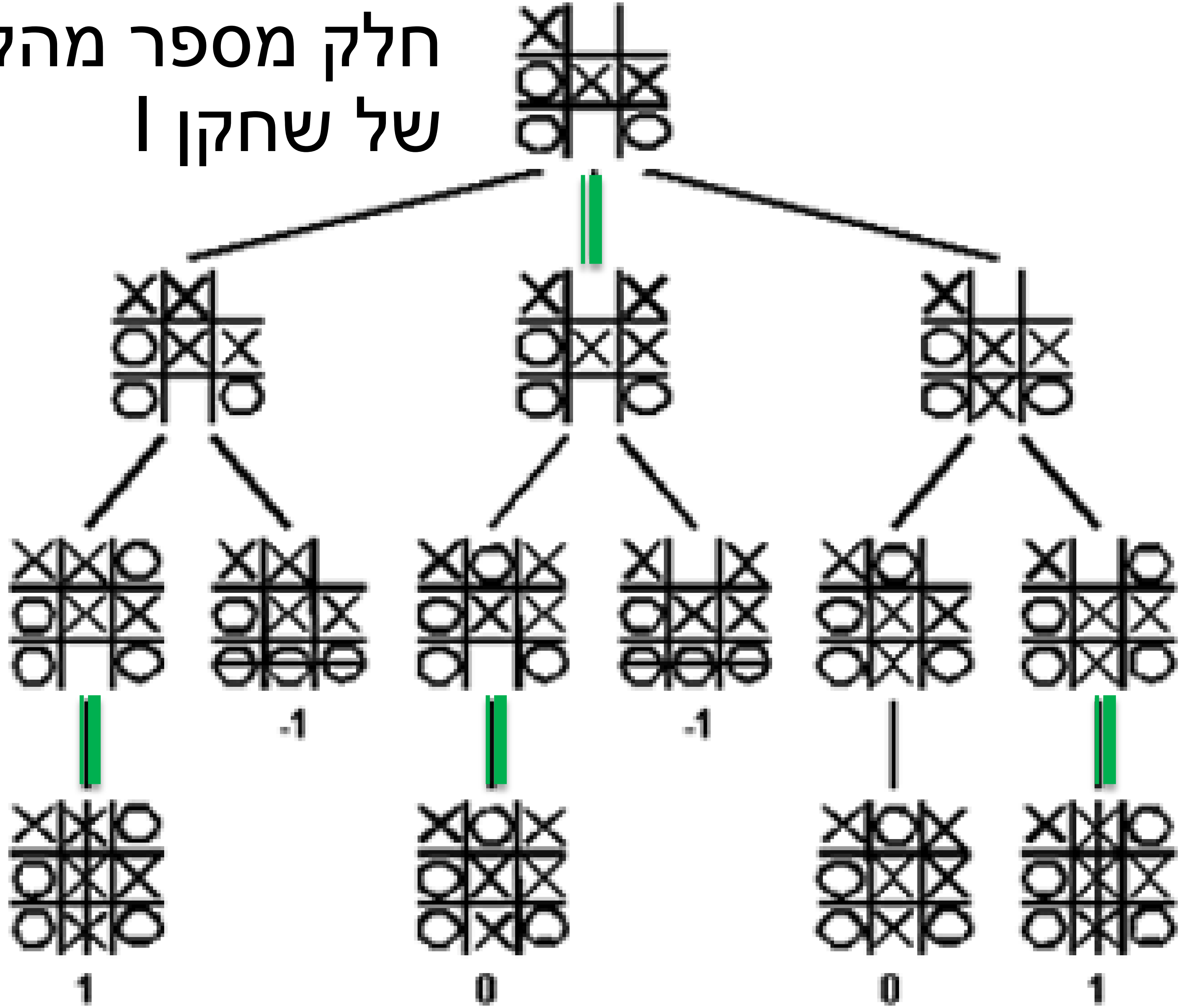
- נשים לב: עץ המשחק של איקס-עיגול הוא ***סופי***.

- בכל שלב במשחק, כל שחקן יודע בדיוק באיזה קדקד בעץ הוא נמצא, ואילו מהלכים הובילו אל מצב זה. תכונה זו של המשחק נקראת ***ידיעה שלמה***.

- לפני המשחק, כל שחקן יכול לבנות לעצמו "ספר מהלכים", בו הוא מחליט מראש בכל קדקד (שלו) באיזה מהלך הוא בוחר.

- כך כל תגובה למהלך של השחקן השני מוגדרת מראש. בדומה למשחקים אסטרטגיים.

חלק מספר מהלכים
של שחקן I



אסטרטגיה במשחק בצורה רחבה

- ניתן לתאר את ספר המהלכים הנ"ל בעזרת פונקציה המתאימה לכל קדקד (השייך לשחקן) את אחד מבניו בעץ (עבור עלה הפונקציה תחזיר $\emptyset$).

- לפונקציה כנ"ל קוראים ***אסטרטגיה*** של שחקן i ומסמנים ב s_i.

- הפונקציה אוגרת מידע מיותר, כיוון שיש קדקדים שאף פעם לא נגיע אליהם (מדוע?)

- בהנתן אסטרטגיות s_I, s_{II} של שחקנים I,II בהתאמה, ניתן לדעת בדיוק איך יסתיים המשחק.

פונקציות התועלת במשחק בצורה רחבה

- אם כך ניתן להגדיר את הקלט של פונקציות התועלת ע"י האסטרטגיות של שני השחקנים.

- לדוגמה באיקס-עיגול נקבל עבור שחקן I:

$$u_I(s_I, s_{II}) = \begin{cases} 1 & \times \text{wins} \\ -1 & \odot \text{wins} \\ 0 & \text{draw} \end{cases}$$

דוגמה: איקס-עיגול

- ישנם 255,168 משחקים שונים אפשריים של איקס-עיגול. כלומר במושגים שלנו 255,168 תחרויות שונות.
  - 131,184 מסתיימים בניצחון של X
  - 77,904 מסתיימים בניצחון של O
  - 46,080 מסתיימים בתיקו
- **<u>הערה:</u>** אם נפטרים ממשחקים שמתקבלים ממשחקים אחרים ע"י סיבוב או שיקוף נשאר בסוף עם 26,830 משחקים שונים.
- לכאורה יש ייתרון במשחק איקס-עיגול לשחקן X.
- אך האם אכן כך?

דוגמה: איקס-עיגול (פתרון המשחק)

- למעשה כל שחקן באיקס-עיגול יכול להבטיח לעצמו <u>לפחות תיקו</u>.
- כלומר אם כל שחקן משחק במיטבו ולא עושה אף טעות, כל המשחקים בין השחקנים יסתיימו בתיקו!
- במילים אחרות, קיימת לשחקן I אסטרטגיה s_I כך שלכל אסטרטגיה s_{II} של שחקן II מתקיים

$$u_I(s_I, s_{II}) \in \{0,1\}$$

- ולשחקן II קיימת אסטרטגיה s_{II} כך שלכל אסטרטגיה s_I של שחקן I מתקיים

$$u_{II}(s_I, s_{II}) \in \{0,1\}$$

אסטרטגיות מנצחות ואסטרטגיות מבטיחות לפחות תיקו

- בעקרון, שחקן I היה מעוניין באסטרטגיה s_I כך שלכל אסטרטגיה s_{II} של שחקן II היה מתקיים

$$u_I(s_I, s_{II}) = 1$$

- לאסטרטגיה כזו קוראים אסטרטגיה מנצחת של שחקן I.

במשחק עיגול אין לאף שחקן ***אסטרטגיה מנצחת***.

- לאסטרטגיה s_I של שחקן I עבורה לכל אסטרטגיה s_{II} של שחקן II מתקיים

$$u_I(s_I, s_{II}) \in \{0,1\}$$

קוראים ***אסטרטגיה מבטיחה לפחות תיקו*** של שחקן I.

תרגום משחק בצורה רחבה למשחק בצורה אסטרטגית

- ברגע שהבנו מהן אסטרטגיות במשחק בצורה רחבה, ניתן לבנות מטריצת משחק

	s_{II}^1	s_{II}^2	s_{II}^3	$\cdots$
s_I^1	1	0	0	
s_I^2	1	-1	1	
s_I^3	0	1	0	
$\vdots$				

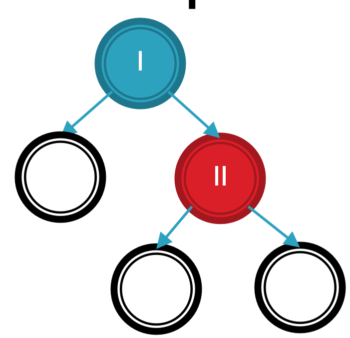
- מטריצה זו היא אמנם סופית, אך היא ענקית.
- אסטרטגיה של שחקן I היא מנצחת אם ורק אם....
- אסטרטגיה של שחקן II מבטיחה תיקו אם ורק אם....

האם כל משחק בצורה אסטרטגית מתאר משחק בצורה רחבה?

- ניקח מטריצת משחק ריבועית בגודל 2 על 2

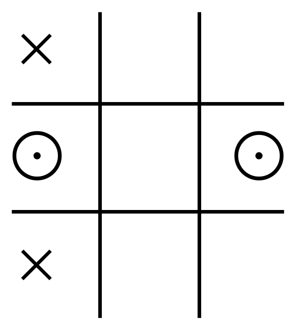
	L	R
T	1	-1
B	-1	1

- לשחקן I יש בחירה בין שני קודקודים, וכך גם לשחקן II
- לכן עבור בחירה אחת של שחקן I, לשחק II אין בחירה
- לכן אסטרטגיה אחת של שחקן I חייבת להסתיים באותה התוצאה ללא קשר לבחירת האסטרטגיה של שחקן II, בסתירה.

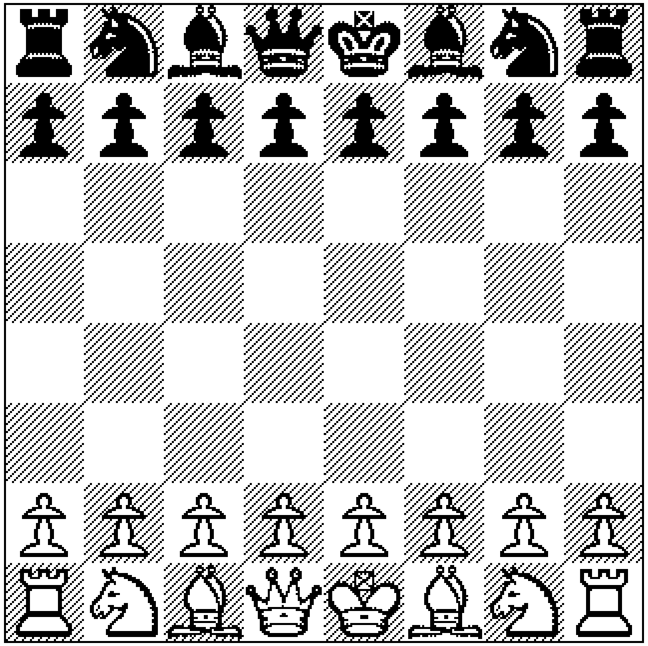


תתי-משחקים

- עבור כל מצב במשחק בצורה רחבה ניתן לשאול עבור שחקן האם קיימת לו אסטרטגיה מנצחת ממצב זה.
- לדוגמה באיקס-עיגול במצב הבא קיימת לשחקן X אסטרטגיה מנצחת, מהי?



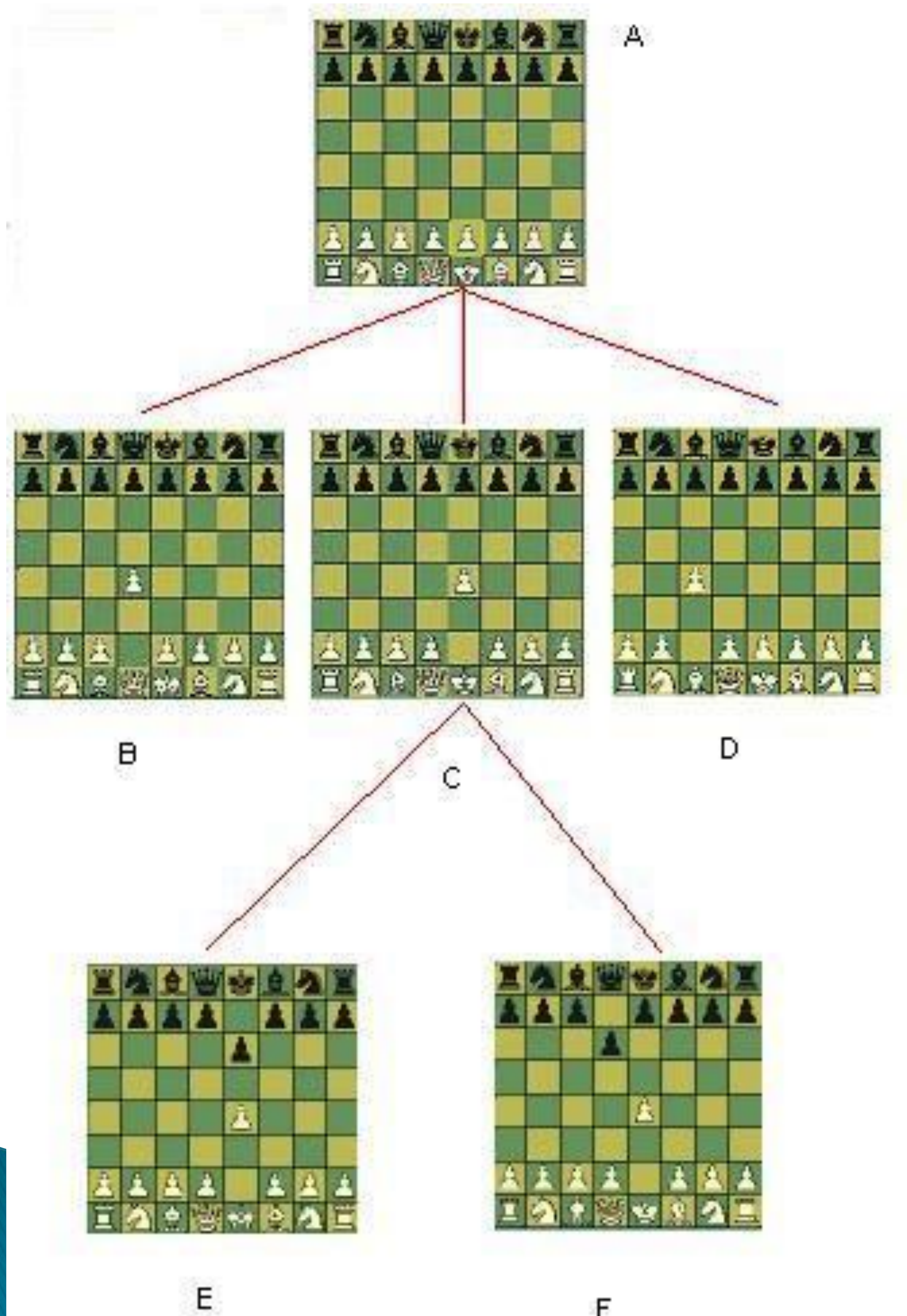
- לכן יש חשיבות בהגדרת ***תת-משחק***, בו לוקחים קדקד x בעץ, ואת כל ***צאצאיו***, ומגדירים אותו כעץ המשחק.



דוגמה - שחמט

- המשחק מתנהל על לוח 8x8.
- לכל שחקן יש 16 כלי משחק
שמיקומם בתחילת המשחק קבוע.
- המשחק מתנהל בתורות, כאשר
השחקן הלבן ראשון.
- לכל סוג של כלי יש מספר מהלכים חוקיים סופי.
- המשחק מסתיים כאשר אחד השחקנים הורג את המלך של השחקן השני (שח-מט), או כאשר השחקן שעכשיו תורו לא יכול לבצע מהלך, ומלכו אינו מאוים (תיקו – ישנם עוד מצבים הגורמים לתיקו).

דוגמה – שחמט



- ניתן לייצג גם את משחק השחמט ע"י עץ משחק.
- ישנם בערך 10^{123} עלים לעץ המשחק של שחמט.
- העץ הוא עצום, ולכן אפילו בעזרת מחשב לא ניתן למפות את כל העץ ולבדוק את קיומן של אסטרטגיות מנצחות/מבטיחות תיקו.
- ישנם כללים במשחק השחמט המבטיחים שהעץ סופי.

משפט זרמלו (1913)

- במשחק השחמט נכונה אחת ורק אחת מהטענות הבאות:
  - ללבן יש אסטרטגיה מנצחת
  - לשחור יש אסטרטגיה מנצחת
  - לכל אחד מהשחקנים יש אסטרטגיה המבטיחה לפחות תיקו.

- שימו לב שהמשפט אינו אומר את הדבר הברור שכל משחק מסתיים בנצחון, תיקו או הפסד.

- למעשה הסיבה היחידה שמשחק שחמט מעניין היא שעדיין לא ניתן לחשב את כל עץ המשחק ולבדוק אילו מהאפשרויות היא הנכונה.

משפט פון-נוימן (???)

- בכל משחק בצורה רחבה עם: שני שחקנים, עץ משחק סופי, ידיעה שלמה, וקבוצת התוצאות היא {I מנצח, II מנצח, תיקו} מתקיימת אחת ורק אחת משלוש האפשרויות הבאות:
  - לשחקן I יש אסטרטגיה מנצחת
  - לשחקן II יש אסטרטגיה מנצחת
  - לכל אחד מהשחקנים יש אסטרטגיה המבטיחה לפחות תיקו.
- המשפט אינו נכון עבור עצי משחק אינסופיים.

הערה: למעשה כנראה שזרמלו כבר הוכיח טענה זו ב 1913, ואילו פון-נוימן ומורגנסטרן הוכיחו את המשפט ב 1944 בעזרת ***אינדוקציה לאחור***, שהיא השיטה בה נתמקד בקורס (ראה Schwalbe & Walker 2001).

הוכחת משפט זרמלו/פון-נוימן

- מוכיחים את המשפט עבור משחק נתון אחד, ומשפחת כל תתי-המשחקים שלו. נסמן משפחה זו ב F.
- ההוכחה היא באינדוקציה על מספר הקדקדים בעץ $\Gamma \in F$.
- אם מספר הקדקדים בעץ Γ הוא 1, אזי העץ הוא אחד העלים במשחק.
- בוודאי שהמשפט נכון עבור עלה, כיוון שעלה מייצג סיום משחק:
  - אם שחקן I ניצח, אז יש לשחקן I "אסטרטגיה מנצחת" בעלה.
  - אם שחקן II ניצח, אז יש לשחקן II "אסטרטגיה מנצחת".
  - אם המשחק הסתיים בתיקו, אז לכל אחד מהשחקנים יש אסטרטגיה שמבטיחה לו לפחות תיקו.

המשך הוכחה

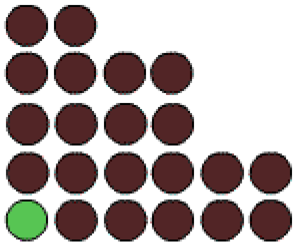
- נניח שהטענה נכונה עבור כל תת-משחק עם לכל היותר $n-1$ קדקדים, ונוכיח את הטענה עבור תת-משחק עם n קדקדים.
- נניח בלי הגבלת כלליות שתת-המשחק מתחיל בתור של שחקן I.
- לפי הנחת האינדוקציה לכל אחד מתת-המשחקים שמתחילים באחד מבניו של הקדקד הראשי מתקיים המשפט.
- אם קיים בן של הקדקד הראשי בו לשחקן I יש אסטרטגיה מנצחת, אזי קיימת לשחקן I אסטרטגיה מנצחת.
- אם בכל בניו של הקדקד הראשי יש לשחקן II אסטרטגיה מנצחת, אזי לשחקן II יש אסטרטגיה מנצחת.

המשך הוכחה

- אחרת: בכל אחד מהבנים של הקודקד הראשי יש לשחקן II אסטרטגיה מנצחת או קיימת לשני השחקנים אסטרטגיה מבטיחה תיקו.
- בנוסף בהכרח קיים בן בו לשני השחקנים אסטרטגיה מבטיחה תיקו.
- לכן גם מהקדקד הראשי קיימת אסטרטגיה מבטיחה תיקו לשני השחקנים. שחקן I יבחר בבן שמבטיח תיקו, ושחקן II בכל בן יכול להבטיח תיקו או ניצחון.
- מש"ל

דוגמה – משחק צ'ומפ (chomp)

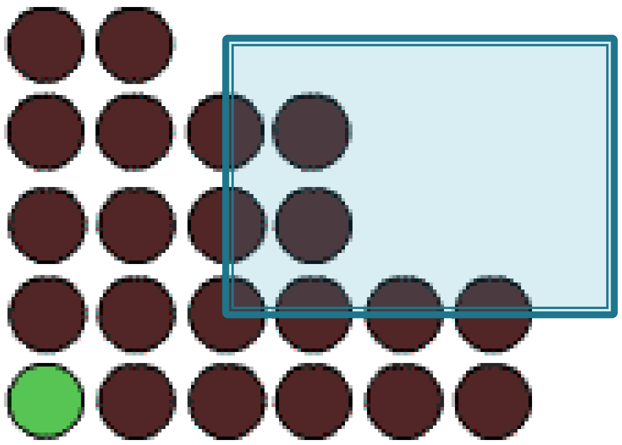
- המשחק הומצא ע"י Frederik Schuh ב 1943 או ע"י David Gale ב 1974.



- מסדרים עוגיות בצורה מלבנית הדומה לנ"ל, כאשר העוגיה השמאלית התחתונה מורעלת.
- כל שחקן בוחר עוגיה בתורו, ואז הוא אוכל/מקבל את כל העוגיות שמעל ומימין לעוגיה שלו.

דוגמה – משחק צ'ומפ (chomp)

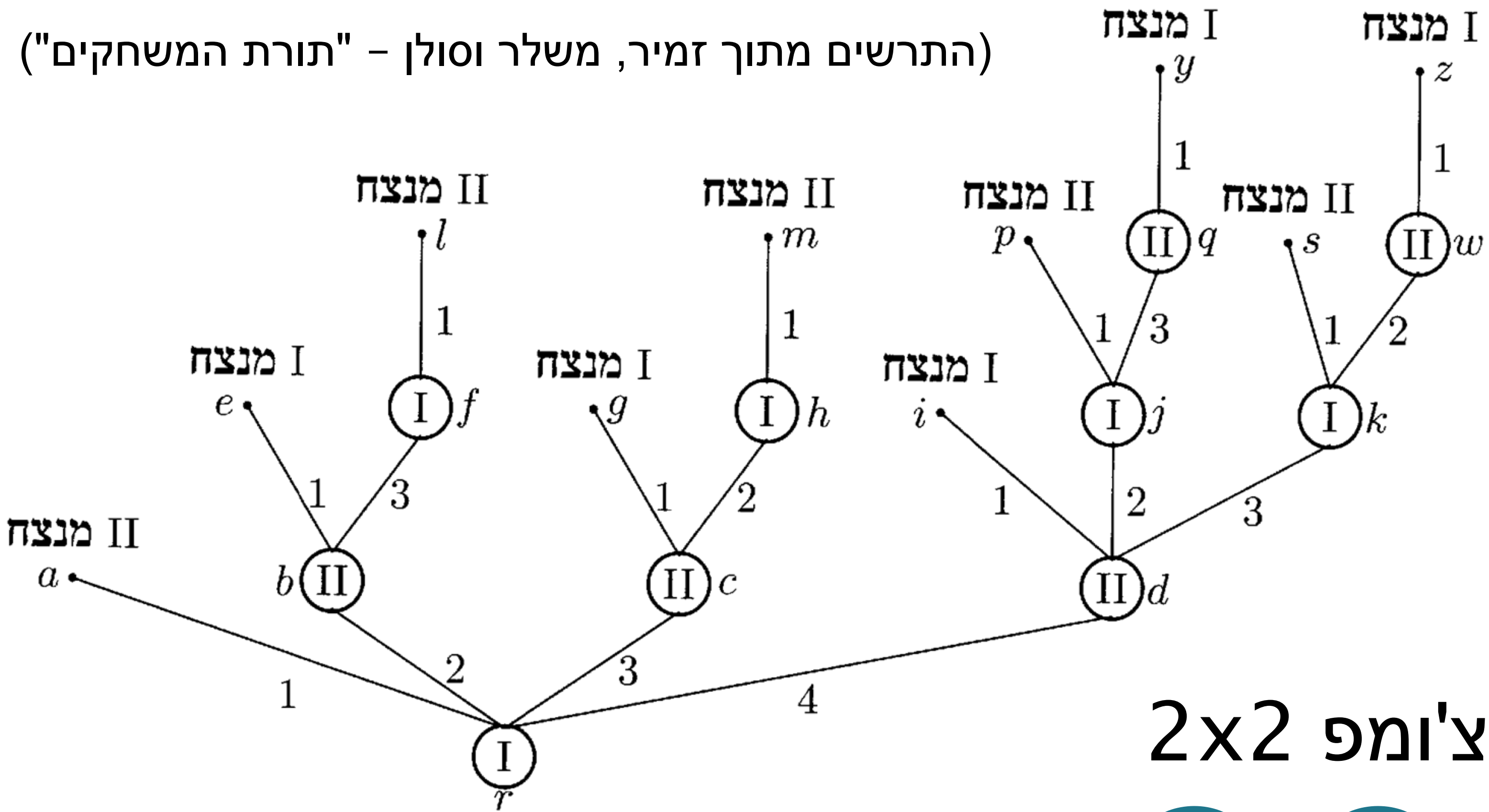
- כלומר אם שחקן I בחר בעוגיה במיקום (3,2) אז:



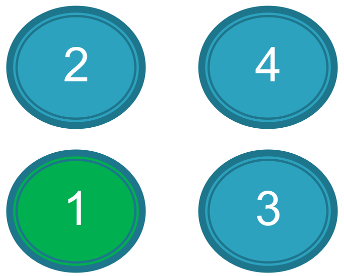
- מפסיד השחקן שאוכל את העוגיה המורעלת.

דוגמה – משחק צ'ומפ (chomp)

(התרשים מתוך זמיר, משלר וסולן – "תורת המשחקים")



משחק צ'ומפ 2x2



צ'ומפ ריבועי

- **<u>משפט:</u>** במשחק צ'ומפ n×n לשחקן I יש אסטרטגיה מנצחת.
- **<u>הוכחה:</u>**
- שחקן I בוחר בעוגיה $(2,2)$.
- כעת שחקן II יכול לבחור רק בעוגיה $(i,1)$ או $(1,i)$.
- אם שחקן II בוחר בעוגיה $(i,1)$
  אז שחקן I ייבחר בעוגיה $(1,i)$, ולהיפך.
- באופן זה יאכלו העוגיות עד שתשאר רק עוגיה $(1,1)$ לשחקן II.

צ'ומפ מלבני

- **משפט:** עבור כל לוח צ'ומפ nxm (כאשר $n>1$ או $m>1$) יש לשחקן I אסטרטגיה מנצחת.
- **הוכחה:** לפי משפט זרמלו/פון-נוימן לאחד השחקנים יש אסטרטגיה מנצחת (כי אין תיקו).
- נניח בשלילה שלשחקן II יש אסטרטגיה מנצחת s_{II}.
- האסטרטגיה של שחקן II אומרת שאם שחקן I אוכל את עוגיה (m,n) (הימנית עליונה) אז שחקן II יבחר לאכול את עוגיה (i,j).
- אם כך שחקן I יכול לאכול מלכתחילה את עוגיה (i,j), ומעתה לשחק לפי האסטרטגיה של שחקן II, ולנצח את המשחק. כלומר גם לשחקן I יש אסטרטגיה מנצחת.
- סתירה, מש"ל.
- **מה שמדהים במשפט הוא שאיננו יודעים מההוכחה מהי האסטרטגיה המנצחת!!!**