ב"ש אנליזה 2 תשעט מועד ב

1. חשבו את:

(א) $\int \frac{x^4+3x+1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$.

פתרון: נבצע חילוק פולינומים:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 \quad +3x \quad +7 \\
\hline
x^2-3x+2 & x^4 \qquad\qquad\qquad +3x \quad +1 \\
 & -x^4+3x^3-2x^2 \\
\cline{2-2}
 & \quad 3x^3-2x^2 \quad +3x \\
 & \quad -3x^3+9x^2 \quad -6x \\
\cline{2-2}
 & \qquad 7x^2 \quad -3x \quad +1 \\
 & \qquad -7x^2+21x-14 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 18x-13
\end{array}
$$

וקיבלנו ש $x^4+3x+1=\left(x^2+3x+7\right)\left(x^2-3x+2\right)+(18x-13)$ ולכן

$$\int \frac{x^4+3x+1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x=\int \frac{\left(x^2+3x+7\right)\left(x^2-3x+2\right)+(18x-13)}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x=$$

$$=\int \left(x^2+3x+7\right)\mathrm{d}x+\int \frac{18x-13}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+7x+\int \frac{18x-13}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$$

ונמשיך עם $\int \frac{18x-13}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x$ ע"י פירוק לשברים חלקיים: כיוון ש $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$, קיימים A,B קבועים כך ש

$$\frac{18x-13}{(x-2)(x-1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}$$

ואם נעשה מכנה משותף והשוות מונים נקבל ש

$$18x-13=A(x-1)+B(x-2)$$

ונוכל להציב $x=1$ לקבל $-B=5$ כלומר $B=-5$ ונוכל להציב $x=2$ לקבל $A=23$. לסיכום קיבלנו ש

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^4+3x+1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x &= \frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+7x+\int \frac{18x-13}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+7x+23\int \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x-5\int \frac{1}{x-1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+7x+23\ln|x-2|-5\ln|x-1|+C
\end{aligned}
$$

(ב) $\int \frac{\sin\left(e^{-x}\right)}{e^{x}}\mathrm{d}x$.

פתרון: נשים לב ש $\frac{\sin\left(e^{-x}\right)}{e^{x}} = \sin\left(e^{-x}\right)\cdot e^{-x}$ ונשתמש בשיטת ההצבה:

$$\begin{aligned}\int \sin\left(e^{-x}\right)\cdot e^{-x}\mathrm{d}x &= \left\{\begin{array}{c} t = e^{-x} \\ \mathrm{d}t = -e^{-x}\mathrm{d}x \end{array}\right\} = \\ &= \int \sin(t)\,(-1)\,\mathrm{d}t \\ &= \cos(t) + C \\ &= \cos\left(e^{-x}\right) + C\end{aligned}$$

.2

(א) מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x) = x + \ln(1+x)$.

פתרון: אסימפטוטות אנכיות: הפונקציה לא מוגדרת לכל $x \leq -1$, ולכן -1 נקודת קצה, נבדוק את הגבול שמה מימין:

$$\lim_{x\to(-1)^{+}} x + \ln(1+x) = \{-1-\infty\} = -\infty$$

ולכן יש אסימפטוטה אנכית ב $x = -1$ (מצד ימין).

אסימפטוטה משופעת מימין: נחשב את הגבול

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{\ln(1+x)}{x} \underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1 + 0 = 1$$

ו

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\infty} x + \ln(1+x) - x = \lim_{x\to\infty}\ln(1+x) = \infty$$

ולכן אין אסימפטוטה משופעת מימין.

אסימפטוטה משופעת משמאל: הפונקציה לא מוגדרת לכל $x \leq -1$ ולכן אין אסימפטוטה משופעת משמאל.

(ב) קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^\infty \frac{100}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

פתרון: נחשב ישירות

$$\int_1^\infty \frac{100}{x^2+1}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{100}{x^2+1}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} 100\arctan(x)\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty} 100\left[\arctan(t) - \arctan(1)\right] = 100\left[\frac{\pi}{2} - \arctan(1)\right]$$

ולכן האינטגרל מתכנס.

.3

(א) חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} e^{\left(t^2\right)}\mathrm{d}t}{1-\cos(x)}.$$

פתרון: כיוון ש $\lim_{x\to 0}\int_0^{x^2} e^{\left(t^2\right)}\mathrm{d}t = 0$ (כיוון ש $e^{\left(t^2\right)}$ רציפה והקטע בו עושים אינטגרל שואף ל 0) נוכל בעזרת המשפט

היסודי של החדוא לקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} e^{\left(t^2\right)}\mathrm{d}t}{1-\cos(x)} \underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}} \lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot e^{\left(x^4\right)}}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(x)}\cdot\lim_{x\to 0} e^{\left(x^4\right)} = 2\cdot 1 = 2$$

(ב) חשבו את גבול הסדרה $a_n = \frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3}$.

פתרון: נראה שזהו סכום רימן:

$$a_n = \frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

ועבור $f(x)=x^2$ שהיא רציפה בקטע $[0,1]$ נקבל ש

$$a_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \to \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

.4

(א) קרבו את $\frac{1}{\sqrt{e}}$עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{100}$.

פתרון: טור טיילור של e^x הוא

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

ואם נציב $x=-\frac{1}{2}$, נקבל

$$\frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{2^n}$$

וזהו טור לייבניץ ולכן מתקיים שלכל k, יש את החסם

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{2^n}\right| \le \left|\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{2^k}\right| = \frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{2^k}$$

שזהו חסם על השגיאה $\left|e^{-\frac{1}{2}}-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{2^k}\right|$. כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ $\frac{1}{100}$ נחפש k עבורו $\frac{1}{100}\le\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{2^k}$.
עבור $k=4$ נקבל $\frac{1}{100}=\frac{1}{10\cdot 10}<\frac{1}{24\cdot 16}=\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2^4}$. מכאן שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{4-1}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{2^n} = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}-\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^3} = \frac{29}{48}$$

עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$ כמבוקש.

(ב) מצאו את הנגזרת $f^{(100)}(0)$ עבור $f(x)=e^{\left(x^2\right)}$.

פתרון: טור טיילור של e^x הוא

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

ואם נציב x^2 במקום x, נקבל

$$e^{\left(x^2\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x^2\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$$

וזהו טור טיילור של $e^{\left(x^2\right)}$ מפותח סביב 0. המקדם של x^{100} בטור טיילור זה הוא מצד אחד $\frac{f^{(100)}(0)}{100!}$ (לפי הגדרה) ומצד שני $\frac{1}{50!}$ (בחישובים שלנו, עבור $n=50$). לכן

$$\frac{f^{(100)}(0)}{100!}=\frac{1}{50!}$$

או

$$f^{(100)}(0)=\frac{100!}{50!}$$

5. תהא f פונקציה רציפה כך שלכל $x>0$ מתקיים $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t$

(א) הוכיחו/הפריכו: $f(0)=0$.

פתרון: הפרכה: הפונקציה הקבועה $f(x)=1$ מקיימת כי

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x 1\mathrm{d}t=x=-(-x)=\int_{-x}^0 1\mathrm{d}t=\int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t$$

אבל $f(0)=1\neq 0$.

(ב) הוכיחו/הפריכו: f הינה פונקציה זוגית, כלומר לכל x מתקיים $f(-x)=f(x)$.

פתרון: הוכחה: את השיוון $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_{-x}^0 f(t)\mathrm{d}t$ נגזור ולפי המשפט היסודי של החדוא נקבל

$$f(x)=-f(-x)\cdot(-1)$$

כלומר $f(x)=f(-x)$ לכל $x>0$.