מבחן לינארית 1 קיץ תשפ"א מועד ג'

כ"ד תשרי תשפ"ב, 30.9.2021

מרצים: גיא בלשר, תמר בר-און, אליהו מצרי, אלעד עטייא, ארז שיינר.
מתרגלים: אחיה בר-און, תמר בר-און, אריאל ויצמן, עוזי חרוש, נועה כהן, נעם פרץ, גלעד פורת קורן, הראל רוזנפלד.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי – מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

<u>תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תיבדק.</u>

<u>ניתן לענות משני צידי הדף.</u>

בהצלחה!

1. (21 נק') נביט במטריצה

$$.A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&-1\\-2&-3&-1\end{pmatrix}$$

(א) מצאו בסיסים ומימדים למרחב השורות $R(A)$ ולמרחב העמודות $C(A)$.

פתרון. לפי האלגוריתם שלמדנו, כדי למצוא בסיס ומימד ל-$R(A)$ ול-$C(A)$ נדרג את A:

$$.\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&-1\\-2&-3&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+2R_1}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_2}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

עבור $R(A)$: נזכור שדירוג אינו משנה את מרחב השורות, ולכן $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ הוא בסיס ל-$R(A)$, והמימד הוא 2.

עבור $C(A)$: ניקח מהמטריצה המקורית A את העמודות שבצורה המדורגת שקיבלנו מופיע בהן איבר מוביל. אלו שתי העמודות הראשונות, ולכן $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל-$C(A)$, והמימד הוא 2.

(ב) מצאו בסיס ומימד למרחב האפס $N(A)$.

פתרון. כדי למצוא בסיס ומימד למרחב האפס $N(A)$ צריך לפתור את המערכת ההומוגנית $Ax=0$. נמשיך לדרג את A לצורה מדורגת קנונית:

$$.\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-2R_2}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

נסמן את המשתנה החופשי $z=t$, ואז נקבל $x=-2t$ ו-$y=t$. לכן

$$.N(A)=\left\{\begin{pmatrix}-2t\\t\\t\end{pmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נסיק ש-$\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ הוא בסיס של $N(A)$, והמימד הוא 1.

(ג) מצאו בסיס ומימד ל-$R(A)\cap C(A)$.

פתרון. כדי לחשב בסיס ומימד לחיתוך $R(A)\cap C(A)$, נעביר את שניהם לצורה של מערכת משוואות. שני המרחבים נתונים כ-Span של קבוצת וקטורים. ניעזר באלגוריתם שלמדנו למעבר בין הייצוגים.
עבור $R(A)$:

$$.\left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\2&1&y\\0&-1&z\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&y-2x\\0&-1&z\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&y-2x\\0&0&-2x+y+z\end{array}\right)$$

בסך הכל כדי שיהיה פתרון למערכת צריך ש-$-2x+y+z=0$, וזו המשוואה המתארת את $R(A)$.
עבור $C(A)$:

$$.\left(\begin{array}{cc|c}1&2&x\\0&1&y\\-2&-3&z\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+2R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&x\\0&1&y\\0&1&2x+z\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&x\\0&1&y\\0&0&2x-y+z\end{array}\right)$$

כדי שיהיה פתרון למערכת הזו צריך ש-$2x-y+z=0$, וזו המשוואה המתארת את $C(A)$.
כעת, המרחב $R(A)\cap C(A)$ הוא אוסף הווקטורים הפותרים את שתי המשוואות הנ"ל, כלומר

$$\begin{aligned} -2x+y+z&=0 \\ 2x-y+z&=0 \end{aligned}$$

כדי למצוא בסיס ומימד ל-$R(A)\cap C(A)$, נדרג את המערכת ונמצא את הפתרון הכללי:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\leftarrow R_2+R_1} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2\leftarrow \frac{1}{2}R_2]{R_1\leftarrow -\frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$
$$\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1+\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נסמן את המשתנה החופשי $y=t$ ונקבל $x=\frac{1}{2}t$ ו-$z=0$, לכן

$$R(A)\cap C(A)=\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

זה מראה ש-$\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל-$R(A)\cap C(A)$, והמימד הוא 1.

2. (21 נק') יהי פרמטר $a\in\mathbb{R}$, ונביט בווקטורים $v_1,v_2,v_3,v_4\in\mathbb{R}^3$ הנתונים על ידי

$$v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -a \end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix} a^2 \\ -2a \\ -a^3 \end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ענו על הסעיפים הבאים:

(א) מצאו לאילו ערכי הפרמטר a מתקיים כי $v_4\in\operatorname{span}\{v_1,v_2,v_3\}$.
פתרון. נשים לב כי $v_4\in\operatorname{span}\{v_1,v_2,v_3\}$ אם ורק אם למערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & 1 \\ -1 & -2a & 0 & 1 \\ -a & -a^3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

יש פתרון (ואז כל פתרון למערכת ייתן מקדמים לצירוף לינארי של v_1,v_2,v_3 ששווה ל-v_4). למערכת יש פתרון אם ורק אם בצורה המדורגת אין שורת סתירה. נדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & 1 \\ -1 & -2a & 0 & 1 \\ -a & -a^3 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3\leftarrow R_3+aR_1]{R_2\leftarrow R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a^2 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-2a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a & a+2 \end{array}\right)$$

אם $a\neq 0,2$, קיבלנו צורה מדורגת שבה אין שורות סתירה, ולכן יש פתרון, כלומר $v_4\in\operatorname{span}\{v_1,v_2,v_3\}$.
אם $a=0$, המטריצה שקיבלנו היא

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

השורה האחרונה היא שורת סתירה, ולכן עבור $a=0$ מתקיים $v_4\notin\operatorname{span}\{v_1,v_2,v_3\}$.
עבור $a=2$, נמשיך לדרג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו צורה מדורגת שאין בה שורות סתירה, ולכן גם במקרה זה $v_4\in\operatorname{span}\{v_1,v_2,v_3\}$.
בסך הכל: $v_4\in\operatorname{span}\{v_1,v_2,v_3\}$ אם ורק אם $a\neq 0$.

(ב) קבעו לכל ערך של הפרמטר a כמה העתקות לינאריות שונות $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ קיימות המקיימות

$$.Tv_1=Tv_2=Tv_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

פתרון. תמיד יש לפחות אחת, כי $T=0$ מקיימת את התנאי. כדי לדעת כמה העתקות כאלו יש, נשאל מתי v_1,v_2,v_3 הם בסיס ל-$\mathbb{R}^3$. לצורך כך נשים אותם בעמודות מטריצה ונדרג (זו אותה המטריצה כמו בסעיף הקודם בלי האיברים החופשיים):

$$.\begin{pmatrix}1&a^2&1\\-1&-2a&0\\-a&-a^3&0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3+aR_1]{R_2\leftarrow R_2+R_1}\begin{pmatrix}1&a^2&1\\0&a^2-2a&1\\0&0&a\end{pmatrix}$$

לכן v_1,v_2,v_3 הם בסיס אם ורק אם $a\neq 0,2$ (אחרת בצורה המדורגת יש עמודה בלי איבר מוביל, ויש תלות לינארית בין הווקטורים). לפי משפט ההגדרה, נקבל:

- אם $a\neq 0,2$, קיימת העתקה לינארית יחידה המקיימת את התנאי (והיא העתקת האפס);
- אם $a=0,2$, קיימות אינסוף העתקות לינאריות המקיימות את התנאי.

(ג) קבעו לכל ערך של הפרמטר a כמה העתקות לינאריות שונות $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ קיימות המקיימות

$$.Tv_1=Tv_2=Tv_3=Tv_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

פתרון. קודם כל, נבדוק מתי v_1,v_3,v_4 הם בסיס של $\mathbb{R}^3$: נשים אותם בעמודות מטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\-a&0&2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3+aR_1]{R_2\leftarrow R_2+R_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&a&a+2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-aR_2}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&-a+2\end{pmatrix}$$

לכן כל עוד $a\neq 2$ נקבל ש-v_1,v_3,v_4 הם בסיס של $\mathbb{R}^3$. נחלק לשני מקרים:

- אם $a=2$, נקבל $v_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ ו-$v_2=\begin{pmatrix}4\\-4\\-8\end{pmatrix}=4v_1$. לכן לא יכול להיות ש-$Tv_1=Tv_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ (כי $Tv_2=4Tv_1$), ולכן אין העתקות לינאריות כאלו.
- אם $a\neq 2$, ראינו שהווקטורים v_1,v_3,v_4 הם בסיס של $\mathbb{R}^3$. נביע את v_2 כצירוף לינארי שלהם:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a^2\\-1&0&1&-2a\\-a&0&2&-a^3\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3+aR_1]{R_2\leftarrow R_2+R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a^2\\0&1&2&a^2-2a\\0&a&a+2&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-aR_2]{R_1\leftarrow R_1-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&2a\\0&1&2&a^2-2a\\0&0&-a+2&-a^2+2a\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow\frac{1}{-a+2}R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&2a\\0&1&2&a^2-2a\\0&0&1&a\end{array}\right)\xrightarrow[R_2\leftarrow R_2-2R_3]{R_1\leftarrow R_1+R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&3a\\0&1&0&a^2-4a\\0&0&1&a\end{array}\right)$$

(המעבר הראשון בשורה השנייה חוקי כי הנחנו $a\neq 2$). כלומר לכל $a\neq 2$ מתקיים

$$.v_2=3a\cdot v_1+\left(a^2-4a\right)\cdot v_3+a\cdot v_4$$

אם $Tv_1=Tv_2=Tv_3=Tv_4=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ נקבל

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=Tv_2=3a\cdot Tv_1+\left(a^2-4a\right)\cdot Tv_3+a\cdot Tv_4=\begin{pmatrix}a^2\\a^2\\a^2\end{pmatrix}$$

ולכן שוויון מתקיים אם ורק אם $a^2=1$, כלומר $a=\pm1$. לכן אם $a\neq\pm1$ לא קיימת העתקה כזו, ואם $a=\pm1$ קיימת העתקה לינארית יחידה כזו (ממשפט ההגדרה).

בסך הכל: אם $a=\pm 1$ קיימת העתקה לינארית יחידה T המקיימת את התנאי, ואחרת אין העתקה לינארית כזו.

3. (21 נק') יהי $V=\mathbb{R}^2$, יהי $B=\{v_1,v_2\}$ בסיס סדור (משמאל לימין) של V, ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית (אופרטור) כך ש-$[T]_B^B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$.

(א) הוכיחו כי לא קיים בסיס C שעבורו $[T]_C^C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

פתרון. נניח בשלילה שהיה קיים בסיס C כזה. אם $I:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ היא העתקת הזהות, נקבל

$$[T]_C^C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=[I]_C^C.$$

מכיוון שייצוג הע"ל לפי $[\cdot]_C^C$ הוא חח"ע, נקבל $T=I$. אבל אז היינו מקבלים $[T]_B^B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, בסתירה לנתון.

(ב) הביעו באמצעות איברי B בסיס C של V שעבורו $[T]_B^C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

פתרון. לפי הנתון, נקבל

$$[Tv_1]_B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow Tv_1=v_1$$
$$[Tv_2]_B=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Longrightarrow Tv_2=v_1+v_2$$

נסמן $C=\{w_1,w_2\}$. אם $[T]_B^C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, אז $Tw_1=v_1$ ו-$Tw_2=v_2$. נבחר $w_1=v_1$ ו-$w_2=v_2-v_1$, כלומר $C=\{v_1,v_2-v_1\}$. טענה: C בסיס. הוכחה: לפי השלישי חינם, מספיק לבדוק ש-C בת"ל; זה שקול לכך שהייצוגים של וקטורי C לפי הבסיס B יהיו בת"ל. הייצוגים האלו הם $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, והם בת"ל כי המטריצה $\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ הפיכה.

בנוסף,

$$Tw_1=Tv_1=v_1\Longrightarrow [Tw_1]_B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$Tw_2=Tv_2-Tv_1=v_2\Longrightarrow [Tw_2]_B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

ולכן $[T]_B^C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, כנדרש. לכן הבסיס המבוקש הוא $C=\{v_1,v_2-v_1\}$.

(ג) הביעו באמצעות איברי B בסיסים ל-$\ker(T^2-T)$ ול-$\mathrm{Im}(T^2-T)$. (תזכורת: $T^2=T\circ T$)

פתרון. נחשב את $[T^2-T]_B^B$:

$$[T^2]_B^B=\left([T]_B^B\right)^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$
$$[T^2-T]_B^B=[T^2]_B^B-[T]_B^B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

זו כבר מטריצה מדורגת. נמצא בסיס לגרעין:

$$[\ker(T^2-T)]_B=N\left([T^2-T]_B^B\right)=\left\{\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\right\}=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\},$$

ולכן

$$\ker(T^2-T)=\mathrm{span}\{1\cdot v_1+0\cdot v_2\}=\mathrm{span}\{v_1\}.$$

עבור התמונה:

$$[\mathrm{Im}(T^2-T)]_B = C\left([T^2-T]_B^B\right) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן גם

$$\mathrm{Im}(T^2-T) = \mathrm{span}\left\{1\cdot v_1 + 0\cdot v_2\right\} = \mathrm{span}\left\{v_1\right\}.$$

4. (21 נק') יהי V מ"ו נוצר סופית ממימד $n \geq 1$ ותהיינה $T,S : V \to V$ העתקות לינאריות (אופרטורים) כך ש-$T \circ S = T$.

(א) הוכיחו או הפריכו: $\ker T = \ker S$.

פתרון. הפרכה. ניקח $S = I$ ו-$T = 0$. אז כמובן $T \circ S = 0 = T$, אבל $\ker T = V \neq 0 = \ker S$.

(ב) הוכיחו או הפריכו: $\dim \mathrm{Im}T \leq \dim \mathrm{Im}S$.

פתרון. הוכחה. נבחר בסיס B של V, ונתרגם את הנתון למטריצות מייצגות:

$$[T\circ S]_B^B = [T]_B^B \Longrightarrow [T]_B^B \cdot [S]_B^B = [T]_B^B.$$

לכן

$$\mathrm{rank}\left([T]_B^B\right) = \mathrm{rank}\left([T]_B^B\cdot[S]_B^B\right) \leq \min\left\{\mathrm{rank}\left([T]_B^B\right), \mathrm{rank}\left([S]_B^B\right)\right\} \leq \mathrm{rank}\left([S]_B^B\right).$$

מצד שני, הדרגה של המטריצה המייצגת שווה למימד התמונה של ההעתקה הלינארית המתאימה, ולכן קיבלנו

$$\dim \mathrm{Im}T \leq \dim \mathrm{Im}S.$$

(ג) הוכיחו: $\dim \mathrm{Im}(S-I) + \dim \mathrm{Im}T \leq n$ (כאשר $I : V \to V$ היא העתקת הזהות).

פתרון. מהנתון $T \circ S = T$ נקבל $T \circ (S - I) = 0$, ולכן $\mathrm{Im}(S-I) \subseteq \ker T$. כיוון שהמימד של תת-מרחב הוא לכל היותר המימד של כל המרחב, $\dim \mathrm{Im}(S-I) \leq \dim \ker T$. ממשפט הדרגה אנחנו יודעים ש-$\dim\ker T + \dim \mathrm{Im}T = n$, ואם נעביר אגפים ונציב באי-השוויון נקבל

$$\dim \mathrm{Im}(S-I) \leq n - \dim \mathrm{Im}T$$

כלומר

$$\dim \mathrm{Im}(S-I) + \dim \mathrm{Im}T \leq n$$

כנדרש.

5. (21 נק') תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(א) הוכיחו: אם $AB = 0$ אז $\mathrm{rank}(A) \leq \frac{n}{2}$ או $\mathrm{rank}(B) \leq \frac{n}{2}$.

פתרון. אם $AB = 0$ אז $A \cdot C_j(B) = 0$ לכל עמודה $C_j(B)$ של B; לכן $C_j(B) \in N(A)$, ובסך הכל $C(B) \subseteq N(A)$. ממשפט הדרגה נקבל

$$\mathrm{rank}(B) = \dim C(B) \leq \dim N(A) = n - \mathrm{rank}(A)$$

כלומר

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) \leq n.$$

כעת נוכיח את הדרוש: אם $\mathrm{rank}(A) \leq \frac{n}{2}$, סיימנו; אחרת, $\mathrm{rank}(A) > \frac{n}{2}$, ואז

$$\mathrm{rank}(B) \leq n - \mathrm{rank}(A) < n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$$

כנדרש.

(ב) הוכיחו או הפריכו: אם $\operatorname{rank}(A) < \frac{n}{2}$ וגם $\operatorname{rank}(B) < \frac{n}{2}$ אז $AB = 0$.

פתרון. הפרכה. ניקח

$$A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

אז $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = 1 < \frac{3}{2}$, אבל $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$.

(ג) הוכיחו או הפריכו: $\dim N(AB) \leq \dim N(A) + \dim N(B)$.

פתרון. הוכחה. ראשית, נשים לב כי $N(B) \subseteq N(AB)$, כי אם $Bv = 0$ בוודאי $ABv = 0$. ניקח בסיס $\{v_1, \ldots, v_r\}$ של $N(B)$, ונרחיב אותו לבסיס $\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s\}$ של $N(AB)$. לכן $\dim N(B) = r$ ו-$\dim N(AB) = r + s$.

טענה: $\{Bw_1, \ldots, Bw_s\}$ בת"ל. הוכחה: יהי צירוף לינארי מתאפס $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i Bw_i = 0$. מאסוציאטיביות, $B \cdot (\sum_{i=1}^{s} \alpha_i w_i) = 0$, כלומר $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i w_i \in N(B)$. אבל אז אפשר להביע אותו כצירוף לינארי של $\{v_1, \ldots, v_r\}$. כיוון ש-$\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_s\}$ בת"ל בהכרח הצירוף הזה טריוויאלי, כלומר בהכרח מתקיים $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0$.

מצד שני, כיוון ש-$w_1, \ldots, w_s \in N(AB)$, מתקיים $Bw_1, \ldots, Bw_s \in N(A)$. לכן $\dim N(A) \geq s$. בסך הכל נקבל

$$\dim N(AB) = s + r \leq \dim N(A) + \dim N(B),$$

כנדרש.