תרגיל בית 2 במבוא לתורת החבורות
סמסטר א' תש"ף

שאלה 1. כתבו את לוח הכפל של S_3.

שאלה 2. תהי $\sigma = (257)(423)(57)(3416) \in S_8$. מצאו את σ^3 ואת σ^{-1} (אזהרה: המחזורים אינם זרים).

שאלה 3. יהיו $n, m \in \mathbb{Z}$. הוכיחו כי $m\mathbb{Z} \leq n\mathbb{Z}$ אם ורק אם $n|m$.

שאלה 4. בכל סעיף, קבעו והוכיחו האם תת־הקבוצה הנתונה היא תת־חבורה:

א. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ (עם חיבור רגיל).

ב. $8\mathbb{Z}_{12} = \{8k \mid k \in \mathbb{Z}_{12}\} \subseteq \mathbb{Z}_{12}$.

ג. $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \middle| \, a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\} \subseteq GL_3\left(\mathbb{Z}_p\right)$. תזכורת: $GL_3\left(\mathbb{Z}_p\right)$ היא חבורת המטריצות ההפיכות בגודל 3×3 מעל השדה $\mathbb{Z}_p$, עם הפעולה של כפל מטריצות.

ד. $\{A \in M_n(\mathbb{Q}) \mid \det A = 0\} \subseteq M_n(\mathbb{Q})$.

ה. $O_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in GL_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, A^T = A^{-1}\right\} \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ המטריצות האורתוגונליות.

ו. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ הפיכה}\} \subseteq \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f\left(1\right) > 0, f \text{ הפיכה}\}$.

ז. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ הפיכה}\} \subseteq \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f\left(1\right) = 1, f \text{ הפיכה}\}$.

(בשני הסעיפים האחרונים הפעולה היא הרכבת פונקציות).

שאלה 5. הוכיחו ש-A_n היא תת־חבורה של S_n ושיש בה $\frac{n!}{2}$ איברים (רמז: הגדירו $f : S_n \to S_n$ לפי $f(\sigma) = (12)\sigma$).

שאלה 6. תהי G חבורה, ויהיו $H, K \leq G$ תת־חבורות של G. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $H \cap K$ היא תת־חבורה של G.

ב. $H \cup K$ היא תת־חבורה של G.

שאלה 7 (לא להגשה)**.** תהי S אגודה ו-$a \in S$ איבר. נגדיר את פעולת החזקה לפי $a^1 = a$, ולכל $n > 1$ נגדיר $a^{n+1} = a^n \cdot a$. הוכיחו כי מתקיים:

א. $a^n a^m = a^{n+m}$ לכל $n, m \in \mathbb{N}$.

ב. $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$ לכל $n, m \in \mathbb{N}$.

ג. נניח כי S היא חבורה עם איבר יחידה e ונרחיב את ההגדרה לכל חזקה שלמה לפי $a^0 = e$ ו-$a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n$. הוכיחו כי $\left(a_1 \ldots a_k\right)^{-1} = a_k^{-1} \ldots a_1^{-1}$ לכל $a_1, \ldots, a_k \in S$. הסיקו כי $\left(a^n\right)^{-1} = \left(a^{-1}\right)^n$ לכל $n \in \mathbb{Z}$.

בהצלחה!