תרגיל בית 5 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ו

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא לתרגול בשבוע המתחיל בתאריך יז' כסלו ה'תשע"ו, 29.11.2015.

שאלה 1. בכל סעיף נתונה חבורה G ותת-חבורה $H \leq G$. כתבו את כל המחלקות השמאליות של H ב-G:

א. $G = (U_{10}, \cdot)$, $H = \langle 9 \rangle$.

ב. $G = (\mathbb{Z}_{12}, +)$, $H = 3\mathbb{Z}_{12}$.

ג. G חבורה כלשהי, $H = \{e\}$.

שאלה 2. נסתכל על $G = (GL_2(\mathbb{Z}_2), \cdot)$ – חבורת המטריצות ההפיכות מגודל 2×2 מעל $\mathbb{Z}_2$ (שדה בין שני איברים),

א. רשום את כל איברי הקבוצה G (הזכר בהבדל בין $GL_2(\mathbb{Z}_2)$ ל: $M_2(\mathbb{Z}_2)$ בעת הכנת רשימת האיברים) .

ב. תהי תת חבורה של G: $A =< \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} >$. מהו האינדקס של A ב G?

ג. תהי תת חבורה של G: $B =< \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} >$. מהו האינדקס של B ב G?

ד. תהי תת חבורה של G: $C =< \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} >$. מהו האינדקס של C ב G?

שאלה 3. תהא G חבורה לא אבלית מסדר 8. הוכח שקיימת ב G תת חבורה מסדר 4.
(הדרכה: הראה שקיים בהכרח איבר מסדר 4 היוצר את תת החבורה המבוקשת).

שאלה 4. תהי G חבורה סופית, $a, b \in G$ כך ש: $ab = ba$ ו $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1$.
הוכח ש $o(ab) = lcm(o(a), o(b))$

שאלה 5. חשב בעזרת משפט אוילר:

א. 197^{81} מודולו 34

ב. שתי הספרות האחרונות של 1249^{602}

הערה. ניתן להעזר בנוסחה הבאה לחישוב פונקציית אוילר של מספר שלם כלשהו:

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

כאשר $p_1, \ldots\ldots, p_k$ המספרים הראשוניים בפירוק של השלם n.

בהצלחה!