

שיעורי בית 2

1. נגדיר M להיות כל המטריצות מגודל $\infty \times \infty$ עם רכיבים ממשיים שמקיימות שבכל שורה ובכל עמודה יש מספר סופי של איברים שונים מאפס. כלומר

$$M = \left\{ (a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty \times \infty} \mid [\forall i : \#\{a_{i,j} \neq 0 : j \in \mathbb{N}\} < \infty] \wedge [\forall j : \#\{a_{i,j} \neq 0 : i \in \mathbb{N}\} < \infty] \right\}$$

על M נגדיר פעולה של בדומה לכפל במטריצות מגודל סופי. כלומר לכל $A, B \in M$ את הכפל בניהם ע"י

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} b_{k,j}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & & & \end{pmatrix} \text{ למשל } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & & & \end{pmatrix} \text{ ו } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & & & \end{pmatrix}$$

(א) הוכיחו כי הפעולה מוגדרת היטב, כלומר $AB \in M$

פתרון: צ"ל כי בכל שורה ובכל עמודה של AB יש מספר סופי של איברים שונים מאפס. נראה עבור השורות (עבור העמודות מראים באופן דומה). יהא i קבוע ונראה כי $\{(AB)_{i,j} \neq 0 : j \in \mathbb{N}\} < \infty$.

כיון ש $A \in M$ מתקיים כי קיים אינדקס N כך ש $a_{i,k=0}$ לכל $N < k$ (כלומר שממקום מסוים בשורה i ב A מופיעים רק אפסים) ואז

$$\{(AB)_{i,j} \neq 0 : j \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} b_{k,j} \neq 0 : j \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \sum_{k=1}^N a_{i,k} b_{k,j} \neq 0 : j \in \mathbb{N} \right\}$$

בנוסף, כיון ש $B \in M$ מתקיים כי קיים אינדקס M_1 כך ש $b_{k,1} = 0$ לכל $M_1 < k$

וגם קיים אינדקס M_2 כך ש $b_{k,2} = 0$ לכל $M_2 < k$

...

קיים אינדקס M_N כך ש $b_{k,N} = 0$ לכל $M_N < k$

נגדיר $M = \max \{M_j : 1 \leq j \leq N\}$ ואז

$$\begin{aligned} \{(AB)_{i,j} \neq 0 : j \in \mathbb{N}\} &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k} b_{kj} \neq 0 : j \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \sum_{k=1}^N a_{i,k} b_{kj} \neq 0 : j \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^N a_{i,k} b_{kj} \neq 0 : 1 \leq j \leq M \right\} \leq N \cdot M < \infty \end{aligned}$$

(ב) הוכיחו כי ביחס לפעולה זאת M הוא מונואיד.

פתרון : מוגדרות ראינו בסעיף קודם.

קיבוציות - לכל $A, B, C \in M$ צ"ל כי $(AB)C = A(BC)$ אכן לכל i, j מתקיים

$$[(AB)C]_{i,j} = \sum_{k=1}^{\infty} (AB)_{i,k} C_{kj} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} A_{i,t} B_{t,k} C_{kj}$$

באופן דומה לסעיף הקודם, קיים N כך ש $A_{i,t} = 0$ לכל $N < t$ וקיים M כך ש $B_{t,k} = 0$ לכל $M < k$, $1 \leq t \leq N$ ולכן

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} A_{i,t} B_{t,k} C_{kj} = \sum_{k=1}^N \sum_{t=1}^N A_{i,t} B_{t,k} C_{kj} = \sum_{k=1}^M \sum_{t=1}^N A_{i,t} B_{t,k} C_{kj}$$

ואז ניתן להחליף את סדר הסכימה ואז

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M \sum_{t=1}^N A_{i,t} B_{t,k} C_{kj} &= \sum_{t=1}^N \sum_{k=1}^M A_{i,t} B_{t,k} C_{kj} = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_{i,t} B_{t,k} C_{kj} = A_{i,t} B_{t,k} C_{kj} \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} A_{i,t} (BC)_{t,j} = [A(BC)]_{i,j} \end{aligned}$$

איבר יחידה היא מטריצה היחידה

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \\ & \ddots & & \ddots & \end{pmatrix}$$

(ג) מצאו דוגמא לאיבר $A \in M$ שיש לו הפיך ימיני אך אין לו הפיך שמאלי
פתרון : פתרון :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & \\ & \ddots & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

יש לו הפיך ימיני, למשל

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \\ & \ddots & 1 & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

כי

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & \\ & \ddots & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \\ & \ddots & 1 & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} = I$$

(הערה: כל איבר מהצורה

$$\begin{pmatrix} * & * & * & & \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & \\ & \ddots & 1 & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

יהיה הפיך ימיני.

אין לו הפיך שמאלי כי לכל B מתקיים כי

$$C_1(BA) = 0$$

כלומר העמודה הראשונה של BA תהיה עמודת אפסים בפרט לא שווה לעמודה הראשונה של I .

2. הכרה של עוד חבורות:

(א) הקוטרניונים: נגדיר

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

8 מטריצות מרוכבות. עובדה: קבוצה זאת ביחס למכפלת מטריצות היא חבורה. האם חבורה זאת חילופית?

פתרון: לא חילופית, למשל

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

ואילו

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

(ב) המרוכבים: נגדיר

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det(A) = a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$

הוכיחו כי קבוצה זאת ביחס למכפלת מטריצות היא חבורה. האם חבורה זאת חילופית?

פתרון: מוגדרות

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & ab' + ba' \\ -ba' - ab' & -bb' + aa' \end{pmatrix}$$

שזה מהצורה

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

$$x = aa' - bb', y = ab' + ba'$$

כעת

$$\det\left(\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right) \cdot \det\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix}\right) \neq 0$$

כמפלה של שני מספרים שונים מאפס.

קיבוציות- נובע מקיבוציות של מכפלת מטריצות

איבר היחידה- $I \in G$ (אם ניקח $a = 1, b = 0$)

הופכי: יהא $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in G$ אזי מחישוב ישיר נקבל כי

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

שזה מהצורה

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

כאשר $x = \frac{a}{a^2+b^2}, y = \frac{-b}{a^2+b^2}$ ובנוסף

$$\det \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}} \neq 0$$

ולכן ההופכי שייך ל G .
בנוסף, החבורה חילופית כי

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & ab' + ba' \\ -ba' - ab' & -bb' + aa' \end{pmatrix}$$

ששוה ל

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a - b'b & a'b + b'a \\ -b'a - a'b & -b'b + a'a \end{pmatrix}$$

3. תהא G חבורה. נגדיר יחס עליה כך

$$g_1 \sim g_2 \iff \exists x \in G : xg_1x^{-1} = g_2$$

ליחס זה קוראים יחס ההצמדה או יחס צמידות. (מינוח: מחלקת שקילות של יחס ההצמדה נקראת מחלקת צמידות)

(א) הוכח כי \sim יחס שקילות על G .

פתרון: (1) רפלקסיביות: לכל $g \in G$ מתקיים כי $ege^{-1} = g$ ולכן $g \sim g$.

(2) סימטריות: נניח $g_1 \sim g_2$ אזי קיים x כך ש $xg_1x^{-1} = g_2$. נכפול ב x מימין ו x^{-1} משמאל ונקבל $g_1 = x^{-1}g_2x$ נסמן $y = x^{-1}$ ונקבל $g_2 \sim g_1$, כלומר $yg_2y^{-1} = g_1$.

(3) טרנזיטיביות: נניח $g_1 \sim g_2, g_2 \sim g_3$ אזי קיימים x, y כך ש $xg_1x^{-1} = g_2, yg_2y^{-1} = g_3$. נסדר את המשוואות ל $xg_1x^{-1} = g_2 = y^{-1}g_3y$, נציב לקבל $xg_1x^{-1} = y^{-1}g_3y$ נכפול שוב ב y משמאל ו y^{-1} מימין ונקבל

$$yxg_1x^{-1}y^{-1} = g_3$$

נסמן $z = yx$ ונקבל $zg_1z^{-1} = g_3$ כלומר $g_1 \sim g_3$.

(ב) עבור $G = S_n$ ויחס ההצמדה: הוכיחו כי מתקיים $[(1, 2)] = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\} = \{(i, j) \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$ כאשר $[(1, 2)]$ מחלקת השקילות של $(1, 2)$ של יחס ההצמדה [רמז: ש.ב. משבוע שעבר]. הסיקו כמה איברים יש במחלקת השקילות של $(1, 2)$?
פתרון: מתרגיל קודם נקבל כי

$$\sigma(1, 2)\sigma^{-1} = (\sigma(1), \sigma(2))$$

ולכן

$$[(1, 2)]_{\sim} = \{\sigma(1, 2)\sigma^{-1} \mid \sigma \in S_n\} = \{(\sigma(1), \sigma(2)) \mid \sigma \in S_n\} = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

כמה איברים יש בה?

נבחר i כל מספר בין 1 ל n . ואז נבחר j שונה. סה"כ אפשרויות שספרנו זה $n \cdot (n-1)$. אבל ספרנו כפוליות, למשל $(2, 3) = (3, 2)$ צריך לחלק ב 2. התשובה הסופית היא

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

*זה שקול לשאלה לבחור 2 איברים מתוך n ללא חשיבות לסדר, ללא חזרות. לפי נוסחת הבינום זה שווה ל

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

4. הגדרה: תהא G חבורה. נסמן את המרכז של G ב $Z(G) = \{g \in G \mid \forall x \in G : gx = xg\}$. המרכז של G זה כל האיברים ב G שמתחלפים עם כל איבר אחר.

(א) הוכיחו כי $Z(G)$ חבורה. והוכיחו כי זוהי חבורה חילופית.

פתרון: מוגדרות: לכל $g_1, g_2 \in Z(G)$ צ"ל כי $g_1 g_2 \in Z(G)$. שזה שקול להראות שלכל $x \in G$ מתקיים $g_1 g_2 x = x g_1 g_2$. אכן כיוון ש g_1, g_2 מתחלפות עם כל x מתקיים כי

$$g_1 g_2 x = g_1 x g_2 = x g_1 g_2$$

קיבוציות - נובע מהקיבוציות ב G

איבר יחידה: נראה שאיבר היחידה e של G שייך ל $Z(G)$ (ובפרט הוא יהיה יחידה ב $Z(G)$). אכן לכל $x \in G$ מתקיים

$$ex = x = xe$$

הופכי: יהא $g \in Z(G)$ אזי קיים $g^{-1} \in G$. נראה כי $g^{-1} \in Z(G)$. אכן לכל x מתקיים כי

$$gx = xg$$

ואם נכפיל ב g^{-1} משמאל ומימין נקבל כי

$$xg^{-1} = g^{-1}x$$

כלומר $g^{-1} \in Z(G)$ כנדרש.

נראה שהיא חבורה חילופית. אכן יהיו $g_1, g_2 \in Z(G)$ צ"ל כי $g_1 g_2 = g_2 g_1$. אכן כי g_1 מתחלף עם כל $x \in G$ בפרט עם g_2

(ב) לכל $g \in Z(G)$ מצאו את גודל מחלקת הצמידות של g
פתרון: מתקיים כי

$$[g] = \{g' : g' \sim g\} = \{xgx^{-1} : x \in G\} = \{xx^{-1}g : x \in G\} = \{g\}$$

ולכן גודל מחלקת הצמידות שווה 1

5. תהא G חבורה בה מתקיים $(g_1g_2)^2 = g_1^2g_2^2$.
 הוכח כי G חבורה חילופית.
פתרון: יהיו $g_1g_2 \in G$. לפי נתון מתקיים

$$g_1(g_2g_1)g_2 = (g_1g_2)(g_1g_2) = (g_1g_2)^2 = g_1^2g_2^2 = g_1(g_1g_2)g_2$$

נכפיל את השויוון ב g_1^{-1} משמאל וב g_2^{-1} מימין ונקבל כי $g_2g_1 = g_1g_2$.

6.

(א) ראינו בתירגול כי הגדרה שקולה ל \mathbb{Z}_n . נגדיר יחס שקילות על \mathbb{Z} ע"י

$$x \equiv y \iff n|x - y$$

את קבוצת המנה ניתן להציג כ

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$$

והגדרנו את הפעולה

$$[a] + [b] = [a + b]$$

שאינה נקבל חבורה חיבורית $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. כעת נגדיר עוד פעולה על קבוצה זאת: לכל $[a], [b] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ נגדיר פעולת כפל

$$[a][b] = [ab]$$

הוכיחו כי פעולה זאת מוגדרת וביחס אליה נקבל כי $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \cdot)$ מונואיד.

פתרון: מוגדרות הפעולה. נניח $[a] = [a'], [b] = [b']$ צ"ל $[ab] = [a'b']$ אכן מהנתון $n|a - a', n|b - b'$. צ"ל כי $n|ab - a'b'$ אכן

$$ab - a'b' = ab - ab' + ab' - a'b' = a(b - b') + (a - a')b'$$

כיוון ש $a - a', b - b'$ מתחלק ב n גם $ab - a'b'$.

קיבוציות- אכן

$$[a]([b][c]) = [abc] = ([a][b])[c]$$

יחידה [1] כי $[a][1] = [a]$

(ב) בעזרת סעיף קודם חשבו את

$$7^n - 3^n \pmod{8}$$

לכל n טבעי.

פתרון : נסתכל בחבורה במונואיד $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \cdot)$:

עבור $n = 2k$ זוגי נקבל כי

$$[7^{2k}] = [7]^{2k} = [-1]^{2k} = [(-1)^{2k}] = [1]$$

ולכן

$$7^n \pmod{8} = 1$$

בנוסף,

$$[3^{2k}] = [3^2]^k = [9]^k = [1]^k = [1^k] = [1]$$

ומכאן ש

$$[-3^n] = [-1][3^n] = [-1][1] = [-1 \cdot 1] = [-1]$$

ולכן

$$-3^n \pmod{8} = -1$$

ולכן בחבורה החיבורית $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$ נקבל

$$[7^n - 3^n] = [7^n] + [-3^n] = [1] + [-1] = [1 - 1] = [0]$$

כלומר

$$7^n - 3^n \pmod{8} = 0$$

עבור $n = 2k + 1$ אי זוגי נקבל כי

$$[7^{2k+1}] = [7]^{2k+1} = [-1]^{2k+1} = [(-1)^{2k+1}] = [-1]$$

ולכן

$$7^n \pmod{8} = -1$$

בנוסף,

$$[3^{2k+1}] = [3^2]^k [3] = [9]^k [3] = [1]^k [3] = [1^k][3] = [3]$$

ומכאן ש

$$[-3^n] = [-1][3^n] = [-1][3] = [-1 \cdot 3] = [-3] = [5]$$

ולכן

$$-3^n \pmod{8} = 5$$

ולכן בחבורה החיבורית $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +)$ נקבל

$$[7^n - 3^n] = [7^n] + [-3^n] = [-1] + [5] = [-1 + 5] = [4]$$

כלומר

$$7^n - 3^n \pmod{8} = 4$$