# בדידה תרגיל 5- פתרון

1. נגדיר סדרה באופן

$$a_1 = 2$$

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n}$$

.

הוכיחו שלכל $n$, $a_n < 4$.
פתרון: נוכיח שלמעשה לכל $n$, $a_n < 3$.
ובכן, עבור $n = 1$ מתקיים $a_1 = 2 < 3$.
נניח שעבור איזשהו $n$, $a_n < 3$, ונוכיח ש $a_{n+1} < 3$.
$a_{n+1} = \sqrt{3a_n} < \sqrt{3 \cdot 3} = \sqrt{9} = 3$.

2. תהי $A$ קבוצה. נגדיר סדרה של קבוצות באופן הבא:

$$B_1 = A$$

$$B_{n+1} = A \setminus B_n.$$

הוכיחו שלכל $n$ זוגי $B_n = \emptyset$, ולכל $n$ איזוגי $B_n = A$.
פתרון: נוכיח את 2 הטענות במשולב.
עבור $n = 1$, $B_1 = A$.
כעת, נניח שהטענה נכונה לאיזשהו $n$ אי זוגי, ונוכיח שהיא נכונה ל$n + 1$.
$B_{n+1} = A \setminus B_n = A \setminus A = \emptyset$.
נניח שהטענה נכונה לאיזשהו $n$ זוגי, ונוכיח ל$n + 1$.
$B_{n+1} = A \setminus B_n = A \setminus \emptyset = A$.

3. תהי $A$ קבוצה עם $n$ איברים. הוכיחו באינדוקציה ש $|P(A)| = 2^n$.
פתרון: נסמן $A = \{a_1, ..., a_{n+1}\}$. עבור הקבוצה $\{a_1, ..., a_n\}$ ידוע מהנחת האינדוקציה שבקבוצת החזקה שלה יש $2^n$ איברים, כלומר, יש לה $2^n$ תתי קבוצות.

תהי $B$ תת קבוצה של $\{a_1, ..., a_n\}$. אז היא גם תת קבוצה של $A$. כעת, אפשר להוסיף להסתכל על $B' = B \cup \{a_{n+1}\}$, זאת תת קבוצה חדשה של $A$. בינתיים קיבלנו $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ תתי קבוצות של $A$. נוכיח שאלה כל תתי הקבוצות.

תי $C \subseteq A$. אם $a_{n+1} \notin C$ אז $C \subseteq \{a_1, ..., a_n\}$, כלומר, $C$ שווה לאיזשהי $B$. אחרת, $a_{n+1} \in C$. נסמן $B = C \setminus \{a_{n+1}\}$. זאת תת קבוצה של $\{a_1, ..., a_n\}$. קיבלנו ש $C = B \cup \{a_{n+1}\}$ עבור איזושהי תת קבוצה של $\{a_1, ..., a_n\}$. כלומר, כל תתי הקבוצות של $A$ הן מתוך שתי האפשרויות האלו.

4. יהי $A$ פסוק שמורכב רק מאטומים ומהקשר $\wedge$. $(A = B_1 \wedge B_2 \wedge ... \wedge B_n)$. הוכיחו באינדוקציה שאם ערכי האמת של כל האטומים הם $T$ אז גם ערך האמת של $A$ הוא $T$.

עבור $n = 2$: אם $B_1$ ו$B_2$ הם $T$ אז גם $B_1 \wedge B_2$ הוא $T$.

נניח שהטענה נכונה לאיזשהו $n$. כלומר, אם $B_1, ..., B_n$ $T$ אז $B_1 \wedge ... \wedge B_n$ $T$. ונוכיח עבור $n + 1$.

$B_1 \wedge ... \wedge B_n \wedge B_{n+1} = (B_1 \wedge ... \wedge B_n) \wedge B_{n+1}$. אם $B_1, ..., B_{n+1}$ מקבלים ערך אמת $T$ אז מהנחת האינדוקציה ערך האמת של $B_1 \wedge ... \wedge B_n$ הוא $T$, ונקבל מצב של $T \wedge T$ שזה $T$.