

תרגיל בית 9 פונקציות מרוכבות – נקודות סינגולריות וטור לורן

שאלה 1

תהי z_0 סינגולריות עיקרית של $f(z)$. הוכיחו כי לכל N טבעי ולכל M ממשי קימת סדרה $z_n \rightarrow z_0$ כך ש- $\left| (z_n - z_0)^N f(z) \right| \geq M$.

שאלה 2

נניח $f(z)$ אנליטית בטבעת מהסוג $0 < |z| < R$ עבור $R > 0$.

א. האם יתכן שטור לורן של $f(z)$ בטבעת זו מכיל רק חזקות חיוביות ($n \geq 0$) וטור לורן של $\frac{1}{f(z)}$ באותה הטבעת מכיל רק חזקות שליליות ($n \leq 0$)? נמקו את תשובתכם.

ב. האם יתכן שטור לורן של $f(z)$ בטבעת זו מכיל רק חזקות חיוביות ($n \geq 0$) וטור לורן של $\frac{1}{f(z)}$ באותה הטבעת מכיל ∞ חזקות שליליות? נמקו.

שאלה 3

נניח כי הפונקציות $f(z), g(z), r(z), h(z)$ אנליטיות בסביבה מנוקבת של $z_0 \in \mathbb{C}$. עוד נניח כי ל- f קוטב מסדר 2 ב- z_0 , ל- g אפס מסדר 3 ב- z_0 , ל- r אפס מסדר 2 ול- h אפס מסדר 1. מהו סוג הסינגולריות של

א. $\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)}$

ב. $\frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)}$

בנקודה z_0 ?

שאלה 4

פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{1}{z^2(z-2)}$ לטור לורן בטבעת הנתונה:

א. $|z-2| > 2$ (זהו חוץ עיגול סביב $z_0 = 2$ ברדיוס 2).

ב. $0 < |z-2| < 2$ (זהו עיגול נקוב סביב $z_0 = 2$ ברדיוס 2, ללא הנקודה z_0 עצמה).

שאלה 5

פתחו את הפונקציה $f(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-2)}$ לטור לורן המתכנס בתחומים הבאים:

א. (i) $1 < |z| < 2$
 (ii) $|z| > 2$

ב. (i) $0 < |z + 1| < 3$
 (ii) $|z + 1| > 3$

שאלה 6

תהי z_0 נקודת סינגולריות עיקרית של $f(z)$. תהי $g(z)$ פונקציה שלמה ולא קבועה. הוכיחו כי z_0 היא גם סינגולריות עיקרית של ההרכבה $g \circ f$.