פתרון תרגיל בית 7 תורת גלואה - תשע"ח

1. מצאו את הפולינום המינימלי של האיברים הבאים מעל $\mathbb{Q}$:

א. $\sqrt[4]{2}+2\sqrt{2}i$.

ב. $\rho_7^2-\rho_7+2$.

פתרון:

א. נסמן את האיבר בα. נתבונן בהרחבה $\mathbb{Q}\left[\sqrt[4]{2},i\right]$ שהיא (כידוע מתרגיל קודם) שדה הפיצול של x^4-2 ולכן הרחבת גלואה.
נבחין כי $\alpha\in\mathbb{Q}\left[\sqrt[4]{2},i\right]$ ולכן נחשב את הפולינום המינימלי ע"י חישוב המסלול תחת חבורת גלואה אותה חישבנו בתרגיל הקודם.
מחשבים:

$$\begin{aligned}
Id(\alpha) &= \alpha \\
\tau(\alpha) &= \sqrt[4]{2}-2\sqrt{2}i \\
\sigma(\alpha) &= \sqrt[4]{2}i-2\sqrt{2}i \\
\sigma^2(\alpha) &= -\sqrt[4]{2}+2\sqrt{2}i \\
\tau\sigma(\alpha) &= -\sqrt[4]{2}i+2\sqrt{2}i
\end{aligned}$$

כבר קיבלנו חמישה איברים שונים (למה הם בהכרח שונים? $\sqrt[4]{2},\sqrt{2}i$ הם בת"ל...), ומכיוון שדרגת הפולינום המינימלי חייב לחלק את 8 נוכל כבר להסיק שהמסלול הוא בדיוק מגודל 8.
אם כך, הפולינום המינימלי הוא $(x-\alpha)\left(x-\tau(\alpha)\right)\left(x-\sigma(\alpha)\right)\ldots\left(x-\tau\sigma^2(\alpha)\right)$ (כאשר עוברים על כל אברי החבורה).

ב. נסמן את האיבר ב α. נשים לב שהוא שייך להרחבה ${\mathbb{Q}\left[\rho_7\right]}/{\mathbb{Q}}$. זו הרחבת גלואה עם חבורה U_7. נחשב את המסלול:

$$\begin{aligned} Id(\alpha) &= \rho_7^2 - \rho_7 + 2 \\ \sigma(\alpha) &= \rho^6 - \rho^3 + 2 \\ \sigma^2(\alpha) &= \rho^4 - \rho^2 + 2 \\ \sigma^3(\alpha) &= \rho^5 - \rho^6 + 2 \end{aligned}$$

מצאנו כבר 4 איברים שונים (למה שונים?...), ומכיוון שהדרגה חייבת לחלק את 6 נוכל כבר להסיק כי גודל המסלול הוא בדיוק 6. ולכן הפולינום המינימלי הוא

$$\left(x-\alpha\right)\left(x-\sigma(\alpha)\right)\cdots\left(x-\sigma^5(\alpha)\right)$$

2. תהיינה הרחבות גלואה סופיות ${K}/{F}, {L}/{F}$. הוכיחו כי אם $L \cap K = F$ אז $Gal\left(KL/F\right) \cong Gal(K/F) \times Gal(L/F)$.

פתרון: נגדיר הומומורפיזם:

$$\begin{aligned} \Phi\colon Gal\left(KL/F\right) &\to Gal(K/F) \times Gal(L/F) \\ \Phi(\sigma) &= \left(\sigma|_K,\, \sigma|_L\right) \end{aligned}$$

מוגדר היטב: מכיוון שההרחבות ${K}/{F}, {L}/{F}$ הן גלואה, הן בפרט נורמליות ולכן $\sigma(K) = K$ ו־ $\sigma(L) = L$. ולכן $\sigma|_K, \sigma|_L$ הם באמת אוטומורפיזמים של השדות האלו.

הומומורפיזם: אמנם $x = \left(\sigma|_K\tau|_K,\, \sigma|_L\tau|_L\right) = \left(\sigma\tau|_K,\, \sigma\tau|_L\right) = \Phi(\sigma\tau)$ $\left(\sigma|_K,\, \sigma|_L\right)\left(\tau|_K,\, \tau|_L\right) = \Phi(\sigma)\Phi(\tau)$.

חח"ע: נבדוק את הגרעין. נניח $\Phi(\sigma) = \left(\sigma|_K,\, \sigma|_L\right) = \left(Id_K,\, Id_L\right)$ אזי σ פועל טריוויאלית על Kו־ L ולכן בודאי פועל טריוויאלית על KL. ולכן $\sigma = Id$.

על: מכיוון שהחבורות סופיות והגדלים מתאימים כי לפי תרגול בכיתה, כאשר $K\cap L=F$ אז $[KL\colon K]=[L\colon F]$ ולכן

$$|\mathrm{Gal}\,(KL/F)|=[KL\colon F]=[KL\colon K]\,[K\colon F]=[L\colon F]\,[K\colon F]=|\mathrm{Gal}\,(L/F)|\cdot|\mathrm{Gal}\,(K/F)|$$

וסך הכל קיבלנו איזומורפיזם.

3. תהי ${}^{K}\!/_{F}$ הרחבת גלואה סופית עם חבורת גלואה אבלית. יהי $\alpha\in K$ ו $f(x)\in F[x]$ הפולינום המינימלי של α מעל F. הוכיחו כי $f(x)$ מתפצל מעל $F[\alpha]$.

פתרון: $F[\alpha]\subseteq K$ הוא תת־שדה ולכן לפי התאמת גלואה $F[\alpha]=K^H$ עבור איזושהי תת־חבורה מתאימה.
נתון כי חבורת גלואה אבלית, ולכן H היא תת־חבורה נורמלית. לפי התאמת גלואה זה אומר שההרחבה ${}^{F[\alpha]}\!/_{F}$ היא נורמלית, ולכן $f(x)$ מתפצל שם.

4. יהי F שדה ממאפיין שונה מ2. ויהי K שדה הפיצול של פולינום מוני ספרבילי $f(x)\in F[x]$.
נסמן את שורשי $f(x)$ ב $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$.
הדיסקרמיננטה של $f(x)$ היא

$$\Delta(f)=\prod_{1\leq i<j\leq n}(\alpha_i-\alpha_j)^2$$

(אתם יכולים לבדוק שהדיסקרמיננטה של x^2+bx+c זה בדיוק מה שאתם חושבים שזה).

א. הוכיחו כי $\Delta(f)\in F$.

ב. הוכיחו כי $F\left[\sqrt{\Delta(f)}\right]=K^{G_0}$ כאשר $G_0\leq Gal(K/F)$ היא תת החבורה של התמורות הזוגיות (כלומר שאם חושבים על השיכון של $Gal(K/F)$ לתוך S_n: $G_0=Gal(K/F)\cap A_n$).

ג. הסיקו כי $Gal(K/F)$ משוכנת לA_n (כלומר מורכבת רק מתמורות זוגיות) אם ורק אם $\sqrt{\Delta(f)}\in F$.

.

פתרון:

א. נראה כי $S_n \hookrightarrow \mathrm{Gal}$ שומר על הדיסקרמיננטה. נזכר שS_n נוצר ע"י חילופים $(i\,i{+}1)$ ולכן מספיק להראות שהם שומרים על הדיסקמיננטה. אמנם $(i\,i+1)$ שומר על כל הגורמים שאין בהם את α_i או α_{i+1}. את $(\alpha_i-\alpha_{i+1})^2$ הוא שולח ל $(\alpha_i-\alpha_{i+1})^2=(\alpha_{i+1}-\alpha_i)^2$. והוא מחליף בין הגורמים $(\alpha_{i+1}-\alpha_j)^2 \leftrightarrow (\alpha_i-\alpha_j)^2$ ובין הגורמים $(\alpha_j-\alpha_{i+1})^2 \leftrightarrow (\alpha_j-\alpha_i)^2$. ולכן סך הכל S_n שומר על המכפלה $\Delta(f)$, ובפרט חבורת גלואה, ולכן $\Delta(f)\in K^G=F$.

ב. לפי החישובים מהסעיף הקודם, ניתן לראות שכל חילוף $(i\,i{+}1)$ שולח את $\sqrt{\Delta(f)}$ ל $-\sqrt{\Delta(f)}$. כידוע, ניתן לכתוב כל תמורה כמכפלה של חילופים ולכן נקבל $\sigma\left(\sqrt{\Delta(f)}\right)=sgn\left(\sigma\right)\sqrt{\Delta(f)}$.

אם כן, $\sigma\left(\sqrt{\Delta(f)}\right)=\sqrt{\Delta(f)}$ אס"ם $sign(\sigma)=1$ אס"ם $\sigma\in A_n$.

ברור אם כן ש $F\left[\sqrt{\Delta(f)}\right]\subseteq K^{G_0}$, ומצד שני $G_0\subseteq \mathrm{Gal}\left(K/F\left[\sqrt{\Delta(f)}\right]\right)$. ולפי התאמת גלואה זה מוכיח את הדרוש.

ג. לפי הסעיף הקודם והתאמת גלואה: $G_o=G$ אס"ם $K^{G_0}=K^G=F$ אס"ם $F\left[\sqrt{\Delta(f)}\right]=F$ אס"ם $\sqrt{\Delta(f)}\in F$.

s