פתרון תרגיל 6

1) א)

$$\frac{d(x^2y+5xy^2-y)}{dx}=\frac{d(1)}{dx}$$

$$2xy+x^2\frac{dy}{dx}+5y^2+5x2y\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}=0$$

$$(x^2+10xy-1)\frac{dy}{dx}=-2xy-5y^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy-5y^2}{(x^2+10xy-1)}$$

ב)

$$\frac{d(x^5)}{dx}=\frac{d(2y^2+y-1)}{dx}$$

$$5x^4=4y\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5x^4}{(4y+1)}$$

ג)

$$d(y^2)=d(\ln(5x+y))$$

$$2y\frac{dy}{dx}=\frac{1}{5x+y}\left(5+\frac{dy}{dx}\right)$$

$$2y\frac{dy}{dx}=\frac{5}{5x+y}+\frac{1}{5x+y}\frac{dy}{dx}$$

$$\left(2y-\frac{1}{5x+y}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{5}{5x+y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{5}{5x+y}}{\left(2y-\frac{1}{5x+y}\right)}$$

ד)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(\sqrt{x^2y+2}\right)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x^2y+2}}\cdot\left(2xy+x^2\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{\sqrt{x^2y+2}} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2y+2}} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\left(1 - \frac{x^2}{2\sqrt{x^2y+2}}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{\sqrt{x^2y+2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2y+2}}}{\left(1 - \frac{x^2}{2\sqrt{x^2y+2}}\right)}$$

(2

$$\frac{d(x+y^4)}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

$$1 + 4y^3\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

$$(4y^3-1)\frac{dy}{dx} = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{4y^3-1}$$

נציב $x=2$ ו- $y=6$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{4\cdot 6^3-1} = \frac{-1}{863}$

(3 (א.

$$\lim_{x\to 4} \frac{x}{x^2-16} = \underset{\Delta x \neq 0}{st}\left(\frac{4+\Delta x}{(4+\Delta x)^2-16}\right) =$$

$$= st\left(\frac{4+\Delta x}{8\Delta x+\Delta x^2}\right) \Rightarrow$$

לא קיים כי המונה
מס סופי והמכנה מס
אינפיניטסימלי.

(b

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{x}}{x-5} = \underset{\Delta x \neq 0}{St}\left(\frac{\sqrt{5} - \sqrt{5+\Delta x}}{5+\Delta x - 5}\right)$$

$$= St\left(\frac{\sqrt{5} - \sqrt{5+\Delta x}}{\Delta x}\right) = St\left(\frac{(\sqrt{5} - \sqrt{5+\Delta x})(\sqrt{5} + \sqrt{5+\Delta x})}{\Delta x(\sqrt{5} + \sqrt{5+\Delta x})}\right)$$

$$= St\left(\frac{5 - 5 - \Delta x}{\Delta x(\sqrt{5} + \sqrt{5+\Delta x})}\right) = St\left(\frac{-1}{\sqrt{5} + \sqrt{5+\Delta x}}\right)$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{5}}$$

(c

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} =$$

$$= \underset{\Delta x \neq 0}{St}\left(\sqrt{1+\Delta x + \sqrt{1+\Delta x + \sqrt{1+\Delta x}}}\right)$$

$$= \sqrt{St(1 + \Delta x + \sqrt{1+\Delta x + \sqrt{1+\Delta x}}} =$$

$$= \sqrt{St(1+\Delta x) + St(\sqrt{1+\Delta x + \sqrt{1+\Delta x}})} =$$

$$= \sqrt{1 + \sqrt{St(1+\Delta x + \sqrt{1+\Delta x})}} =$$

$$= \sqrt{1 + \sqrt{St(1+\Delta x) + St(\sqrt{1+\Delta x})}} =$$

$$= \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{St(1+\Delta x)}}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}} = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$$

ב.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3+5x^{-2}-4x^{-3}}{6-2x^{-2}+4x^{-3}}=\underset{\Delta x\neq 0}{St}\left(\frac{3+5(\Delta x)^{-2}-4(\Delta x)^{-3}}{6-2(\Delta x)^{-2}+4(\Delta x)^{-3}}\right)$$

$$=St\left(\frac{\frac{3}{(\Delta x)^{-3}}+\frac{5}{(\Delta x)^{-2}}-4}{\frac{6}{(\Delta x)^{-3}}-\frac{2}{(\Delta x)^{-2}}+4}\right)=St\left(\frac{3\Delta x^3+5\Delta x^2-4}{6\Delta x^3-2\Delta x+4}\right)$$

$$=\frac{-4}{4}=-1$$

ג.

$$\lim_{x\to 0^+} x\sqrt{1+x^{-4}}=\underset{\Delta x>0}{St}\left(\Delta x\sqrt{1+(\Delta x)^{-4}}\right)=$$

$$=\underset{\Delta x>0}{St}\left(\sqrt{\Delta x^2(1+(\Delta x)^{-4})}\right)=\underset{\Delta x>0}{St}\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta x^{-2}}\right)$$

$$=\sqrt{\underset{\Delta x>0}{St}\left(\Delta x^2+\frac{1}{\Delta x^2}\right)}\Rightarrow$$ לא קיים זה אינסופי.

ד.

$$\lim_{x\to c^-}\sqrt{c-x}=\underset{\Delta x<0}{St}\sqrt{c-(\Delta x+c)}=$$

$$=\underset{\Delta x<0}{St}\sqrt{-\Delta x}=\sqrt{\underset{\Delta x<0}{St}(-\Delta x)}=\sqrt{0}=0$$

ה. נניח Δx כך ש- $St(\Delta x)=0$ ו- $\Delta x<0$

$$St\left(\frac{|(1+\Delta x)^3-(1+\Delta x)|}{\Delta x}\right)=St\left(\frac{|1+3\Delta x+3\Delta x^2+\Delta x^3-1-\Delta x|}{\Delta x}\right)$$

$$=St\left(\frac{|\Delta x(2+3\Delta x+\Delta x^2)|}{\Delta x}\right)=St\left(\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\right)St(2+3\Delta x+\Delta x^2)$$

מכיוון ש- $\Delta x<0$ נקבל $St\left(\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\right)=St\left(\frac{-\Delta x}{\Delta x}\right)=-1$

סה"כ נקבל גבול -2.

4) יהי n שלם. נחשב גבולות חד צדדים:

$$\lim_{x\to n^+} F(x) = St_{\Delta x>0}(F(n+\Delta x)) = n$$

$$\lim_{x\to n^-} F(x) = St_{\Delta x<0}(f(n+\Delta x)) = n-1$$

כעת נחשב את הגבולות החד צדדים ב- $r \notin \mathbb{Z}$.
יהי $r \notin \mathbb{Z}$. אזי $m < r < m+1$ עבור $m \in \mathbb{Z}$ מסוים. לפי משפט שהוכחנו בעבר, לכל Δx אינפיניטסימלי (לא משנה את הסימן של Δx) מתקיים $m < r+\Delta x < m+1$. לכן:

$$\lim_{x\to r^+} F(x) = \lim_{x\to r^-} F(x) = St(F(r+\Delta x)) = m$$

5) נתון $F(x)=\frac{1}{x-1}$ נחשב גבול ב- $x_0=1$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} = St_{\Delta x\neq 0}\left(\frac{1}{1+\Delta x-1}\right) = St_{\Delta x\neq 0}\left(\frac{1}{\Delta x}\right)$$ אינסופי

לא קיים גבול.

6) א) נתון ש- $\lim_{x\to x_0} F(x) = L$ כלומר לכל Δx אינפיניטסימלי מתקיים $St(F(x_0+\Delta x)) = L$
נחשב גבול של $|F(x)|$ ב- x_0,

$$\lim_{x\to x_0} |F(x)| = St(|F(x_0+\Delta x)|) =$$

$$= |St\, F(x_0+\Delta x)| = |L|.$$

ב) הטענה ההפוכה לא נכונה. ניקח למשל את הפונק' $F(x)=\frac{|x|}{x}$ אנו כבר יודעים שאין לה גבול ב- 0 אולם $|F(x)| = \left|\frac{|x|}{x}\right| = \frac{|x|}{|x|} = 1$ לכן הפונקציה