חוק ה-$0-1$ של קולמוגורוב

הגדרה 1. יהי $(\Omega,\mathcal{F})$ מרחב מדיד, ותהי $\{\mathcal{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת σ-אלגברות המוכלות ב-$\mathcal{F}$. נגדיר $\mathcal{T}_n=\sigma\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}\mathcal{F}_k\right)$. ל-$\sigma$-אלגברה $\mathcal{T}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{T}_n$ קוראים **σ-אלגברת הזנב** של $\{\mathcal{F}_n\}$, ולכל מאורע בה קוראים **מאורע זנב**.

משפט 2 (חוק ה-$0-1$ של קולמוגורוב ל-σ-אלגברות)**.** יהי $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מרחב הסתברות, ותהי $\{\mathcal{F}_n\}$ סדרת σ-אלגברות בלתי-תלויות המוכלות ב-$\mathcal{F}$. אזי לכל מאורע זנב A מתקיים $P(A)\in\{0,1\}$.

הגדרה 3. יהי $(\Omega,\mathcal{F})$ מרחב מדיד,ותהי $X_1,X_2,\dots$ סדרת משתנים מקריים. נגדיר את $\sigma(X_1,X_2,\dots)$ להיות ה-σ-אלגברה המינימלית שביחס אליה כל X_n מדיד. (בפרט, היא מוכלת ב-$\mathcal{F}$).

משפט 4 (חוק ה-$0-1$ של קולמוגורוב למשתנים מקריים)**.** יהיו $Y,X_1,X_2,\dots$ משתנים מקריים בלתי-תלויים כך ש-Y הוא $\sigma(X_1,X_2,\dots)$-מדיד. אזי Y קבוע כמעט תמיד, כלומר קיים $c\in\mathbb{R}$ כך ש-$P(\{\omega\in\Omega\mid Y(\omega)=c\})=1$.

במילים, מאורע זנב ביחס לאוסף של משתנים מקריים הוא מאורע שלא תלוי במספר סופי של המשתנים האלו.

שימו לב שבניסוח למשתנים מקריים יש לנו משהו קצת יותר חזק – כי σ-אלגברת הזנב, שהיא על פי ההגדרה $\bigcap_{n=1}^{\infty}\sigma(X_n,X_{n+1},\dots)$, מוכלת ב-$\sigma(X_1,X_2,\dots)$.

תרגיל 5. יהיו $X_1,X_2,\dots$ משתנים מקריים בלתי-תלויים, ותהי $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_n$ סדרת הסכומים החלקיים שלהם. תהי $\{b_n\}$ סדרה כך ש-$b_n\to\infty$. הראו כי קיים $-\infty\le c\le\infty$ שעבורו $P\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{b_n}=c\right)=1$.

אני אציג פה הוכחה עם מאורעות. באופן כמעט זהה אפשר להראות שהמשתנה המקרי $\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{b_n}$ הוא מדיד ביחס ל-σ-אלגברת הזנב, ולכן קבוע כ"ת.

הוכחה. נסתכל על המאורע $A_c=\left\{\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{b_n}\le c\right\}$, ונראה שהוא מאורע זנב. אכן, לכל $n\ge k+1$ מתקיים

$$\frac{S_n}{b_n}=\frac{S_k}{b_n}+\frac{X_{k+1}+\dots+X_n}{b_n}.$$

שינוי של k הערכים הראשונים משנה רק את המחובר הראשון. מאחר ש-$b_n\to\infty$, המחובר הזה בכל מקרה לא ישפיע על ה-$\limsup$, כלומר $\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{b_n}=\limsup_{n\to\infty}\frac{X_{k+1}+\dots+X_n}{b_n}$. זה מראה שהשוויון הבא נכון:

$$A_c=\left\{\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{b_n}\le c\right\}=\left\{\limsup_{n\to\infty}\frac{X_{k+1}+\dots+X_n}{b_n}\le c\right\}.$$

המאורע באגף ימין הוא $\sigma\left(X_{k+1},X_{k+2},\dots\right)$-מדיד (כי כל אחד מהמשתנים המקריים שב-$\limsup$ מדיד ביחס ל-σ-אלגברה הזו, ולכן גם ה-$\limsup$ שלהם מדיד ביחס אליה), ולכן $A_c\in\sigma\left(X_{k+1},X_{k+2},\dots\right)$ לכל k. זה מראה ש-A_c מאורע זנב.

מחוק ה-$0-1$ של קולמוגורוב, לכל $-\infty\leq c\leq\infty$ מתקיים $P\left(A_c\right)\in\{0,1\}$. נגדיר את הפונקציה $F:\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}\to\mathbb{R}$ לפי $F\left(c\right)=P\left(A_c\right)$; זו פונקציה מונוטונית עולה המקיימת $F\left(\infty\right)=1$. נחלק לשני מקרים:

- אם $F\left(-\infty\right)=1$, אז ניקח $c=-\infty$ וסיימנו.
- אחרת, ניקח $c_0=\sup\left\{c\in\mathbb{R}\mid F\left(c\right)=0\right\}$. ניעזר ברציפות של פונקציית ההסתברות על מנת להראות כי $P\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{b_n}=c_0\right)=1$. מצד אחד,

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{b_n}\leq c_0\right)=P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\left\{\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{b_n}\leq c_0+\frac{1}{m}\right\}\right)=$$
$$=\lim_{m\to\infty}P\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{b_n}\leq c_0+\frac{1}{m}\right)=1$$

(כשהשוויון האחרון נובע מהגדרת c_0). מהצד השני,

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{b_n}<c_0\right)=P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{b_n}\leq c_0-\frac{1}{m}\right\}\right)=$$
$$=\lim_{m\to\infty}P\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{b_n}\leq c_0-\frac{1}{m}\right)=0$$

(כשהשוויון האחרון שוב נובע מהגדרת c_0). הראינו $P\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{b_n}=c_0\right)=1$, כנדרש.

$\square$