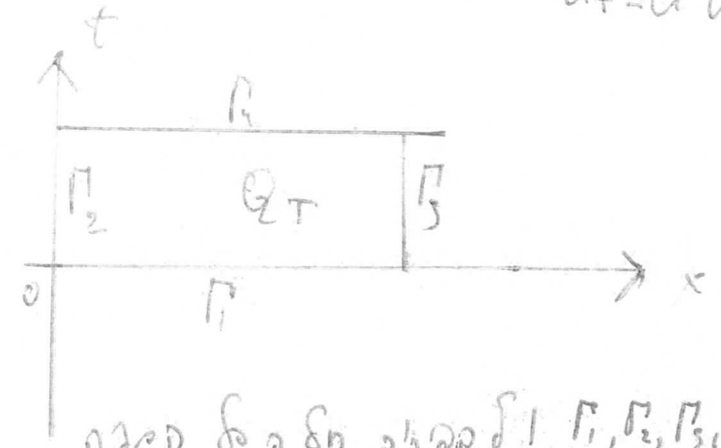
I

# עקרון המקסימום של משוואת החום

$$u_t = a^2 u_{xx}$$



נתון תחום $\bar{Q}_T$

$\bar{Q}_T = \{(x,t): 0 \le x \le \ell,\ 0 \le t \le T\}$

התחום מלבני במישור

נסמן קטעים (שפה) של התחום על-ידי $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ ; נקרא חלק של השפה

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

---

**משפט:** אם פונקציה $u(x,t)$ מוגדרת ורציפה ב $\bar{Q}_T$ ומקיימת משוואת החום $u_t = a^2 u_{xx}$ (1) בנקודות של התחום $Q_T \cup \Gamma_4$, אזי ערך מקסימלי (max) או מינימלי (min) של $u(x,t)$ מקבלת בהתחלת הזמן ($t=0$) או בנקודות הקצה $x=0$ ו $x=\ell$ בהקצוות על השפה $\Gamma$

---

הוכחה

נניח $M_\Gamma$ - ערך המקסימלי של פונקציה $u(x,t)$ באזור (חלק קטעים) של $\Gamma$ של $Q_T$ ו $M$ ערך מקסימלי של $u(x,t)$ בתחום בתוכו $\bar{Q}_T$ צ"ל

$M_\Gamma$ - חלק של $\Gamma$

$M$ - בתחום $\bar{Q}_T$

אזי $M \ge M_\Gamma$

צ"ל ש $M_\Gamma = M$. נניח דרך שלילה $M > M_\Gamma$

ז"א $\exists$ סקלר $\varepsilon = const$ ש $M = M_\Gamma + \varepsilon$

נתבונן לפונקציה עזר

(2) $\boxed{v(x,t) = u(x,t) + \frac{\varepsilon}{2T}(T-t)}$

לפי הגדרה של (2) מיון $v(x,t)$ רציפה ב $\bar{Q}_T$

(II)

!לפי משפט וירשטרס: [תכונות פונקציה רציפות בתחום סגור] היא מקבלת מקסימום בתוכה ש נקודה $(x_0,y_0) \in \bar{Q}_T$: נוכיח ש הנקודה $(x_0,y_0)$ לא יכול להיות על-ה $\Gamma$. לא נשענת על-השפה.

באמת!

$$v(x,0)=u(x,0)+\frac{\varepsilon}{2} \le M_\Gamma+\frac{\varepsilon}{2}<M$$

$$v(0,t)=u(0,t)+\frac{\varepsilon}{2}(T-t) \le M_\Gamma+\frac{\varepsilon}{2}<M$$

$$v(\ell,t)=u(\ell,t)+\frac{\varepsilon}{2T}(T-t) \le M_\Gamma+\frac{\varepsilon}{2}<M$$

$$v(x_0,t_0) \ge M \leftarrow$$ אבל בגלל ש

כמו ש- $\bar{Q}_T$ מתקיימת אי-שוויון
$$v(x,t) \ge u(x,t)$$

מכאן נובע ש נקודה $(x_0,t_0)$ או בתוך $Q_T$ או נמצאת לחלק על $\Gamma$ (חלק $\Gamma$) כמו $\Gamma_4$.

$$\Gamma_4=\{(x,t): 0\le x\le \ell,\ t=T\}$$

בנקודה $(x_0,y_0)$ צריך ש יתקיים תנאי הכרחי של max של $v(x,t)$

צ"א $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\le 0$ , $\frac{\partial v}{\partial x}=0$ $\frac{\partial v}{\partial t}\ge 0$

צריך לציין ש סימן של $\frac{\partial v}{\partial t}$ מחייב

ש (חיפוס = מקומית) נקודה $(x_0,t_0)$ צריך להיות על ה-$\Gamma_4$ כלומר $T=t$. אבל מצד השני אפשר לראות ש $v_t=u_t-\frac{\varepsilon}{2T}$ ! $v_{xx}=u_{xx}$ נקבל [illegible]

[illegible] בנקודה $(x_0,y_0)$

(III)

$$u_t(x_0,t_0) = v(x_0,t_0) + \frac{\varepsilon}{2T} > 0$$

$$u_{xx}(x_0,t_0) = v_{xx}(x_0,t_0) \le 0$$

לכן $u_t(x_0,t_0) - a^2 u_{xx}(x_0,t_0) > 0$

צ"ו. פונקציה $u(x,t)$ בנקודה $(x_0,t_0)$

לא מתקיימת משוואה (1) שמתאים להנחה $\Leftarrow M = m$

באופן אנלוגי (min). לערך המינימלי

של $u(x,t)$ רק לשנות סימן.

צ"ו, למשוואה נתונה (1) מתקיים עיקרון המקסימום.

מ.ש.ל

IV

# משפט על היחידות

לפי משפט עיקרון מקסימום: ניתן לנו אפשרות לנסח משפט על יחידות.

למשוואות החום. לבעית השפה.

**משפט** פתרון למשוואות החום עם בעית השפה

$$\left.\begin{aligned} &u_t=a^2u_{xx}\ , \quad t>0,\quad 0<x<l \\ &u(x,t)\Big|_{t=0}=\varphi(x) \qquad 0\le x\le l \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &u(x,t)\Big|_{x=0}=u(0,t)=\mu(t) \\ &u(x,t)\Big|_{x=l}=u(l,t)=\nu(t) \end{aligned}\right\}\ t>0$$

הוא רציפה ב $\overline{Q}_T$

$$\overline{Q}_T=\{(x,t),\ 0\le x\le l\ ,\ 0\le t\le T\}$$

יחידה!

## הוכחה

נניח שיש לנו שתי פונקציות $u_1(x,t)$ ו $u_2(x,t)$, שמוגדרות ורציפות ב-$\overline{Q}_T$ והן פתרונות של (1). נגדיר פונקציה $\omega(x,t)$

פונקציה $\omega(x,t)$: $\boxed{\omega(x,t)=u_2(x,t)-u_1(x,t)}$,

כמו ההפרש של שתי פונקציות רציפות זה $\Rightarrow$ $\omega$ יהיה רציפה ב $\overline{Q}_T$ וחוץ מזה $\omega$ מקיימת משוואה $\omega_t=a^2\omega_{xx}$, $t>0,\ 0<x<l$ עם תנאים הומוגניים $\Rightarrow$ $\begin{cases}\omega(x,0)=0\\ \omega(0,t)=\omega(l,t)=0\end{cases}$ עבור $t>0$ לפי משפט עיקרון max

מכאן $\omega(x,t)$ כמו min, max מקבלת $\omega(x,t)=0$ כמו בנקודה צריך $\omega(x,t)=0$

ז"א $u_1(x,t)$ ו $u_2(x,t)$ מתלכדים = זהים. מש"ל

## תכונות הפונקציה היסודית (פונדמנטאלית)

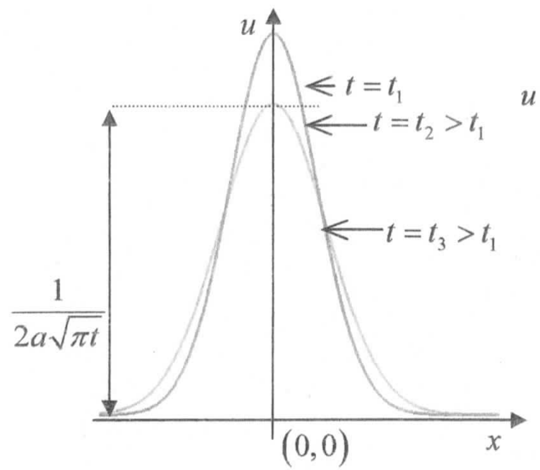
הגדרה: לפונקציה $u(x,t)$ המוגדרת בעזרת:

$$(A)\ \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}=\varphi_\xi(x,t)$$

קוראים פונקציה יסודית

תכונותיה:

1. עבור כל $t=const>0$, ל- $u(x,t)$ מתאימה עקומה של גאוס. היא סימטרית לגבי קו ישר $x=0$, ומקבלת מקסימום ב- $x=0$ או $x=\xi$, וערכה בנקודה הוא $\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}$.
2. השטח מתחת לעקומה $u(x,t_k)$ שווים אחד לשני $(=Q)$




כדי להוכיח את (2) נחשב:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\xi(x,t)dx=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}dx$$

נסמן: $\omega=\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}},d\omega=2a\sqrt{t}$ ואז: $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_\xi(x,t)dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\omega^2}dx=1$.

מבחינה פיזיקאלית: כמות האנרגיה בתוך המוט בנקודה $t=0$, ובזמן האימפולס לא משתנה (ולכן השטחים שווים זה לזה).

(3) לכל $x\neq 0$ קבוע, הפונקציה $u(x,t)$ (כפונקציה של $t$) היא קודם עולה מונוטונית מ-0 כאשר $t=0$ עד הערך $u_m=\frac{1}{\sqrt{2\pi e}\cdot|x-\xi|}$ כאשר $t=t_m=\frac{x^2}{2a^2}$, ומנקודה זו הפונקציה היא מונוטונית יורדת, ומתקיים: $u(x,t)\xrightarrow{t\to\infty}0$

נגדיר את פונקצית דירָק $\delta(x)$ $(Dirak)$:

$$\delta(x-\xi)=\begin{cases}0 & x\neq\xi\\ +\infty & x=\xi\end{cases}$$

לפונקציה זו קוראים פונקצית **אימפולס**.

$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)dx=1$. אם ננסח את השאלה בצורה שונה:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ u(\xi,0)=1\cdot\delta(x)\quad (\text{או: } Q\cdot\delta(x))\end{cases}$$

כאשר $Q=\frac{Q_0}{\rho_c}$ ($Q$ יחידה פיזיקאלית $\rho=$ צפיפות)

$\delta(x)$ מתארת איך משפיע מקור חום על הגוף.

**תכונה:** פתרון יסודי $\varphi_\xi(x,t)$ של משוואה פרבולית (עבור $-\infty<x<\infty$), בתחילת זמן ההתפזרות או התפתחות החום הוא $f(x)=\delta(x-\xi)$