תרגיל בית 10

1. נניח ו H הינו מרחב הילברט עם בסיס בן מנייה ונניח כי $\|x_n\| \to \|x\|$ כאשר $n\to\infty$ וגם $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ לכל $y\in H$ כאשר $n\to\infty$. הוכיחו כי $\|x_n - x\| \to 0$ כאשר $n\to\infty$.

פתרון: מכיוון שיש לנו בסיס בן מנייה $\{\varphi_n\}$ נוכל לרשום $x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^n \varphi_n$ וגם $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_n$. למדנו כי $a_k = \langle x, \varphi_k\rangle$ וגם כי $a_k^n = \langle x_n, \varphi_k\rangle$ ולכן מהנתון כי $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ נובע כי $a_k^n \to a_k$ ומהנתון כי $\|x_n\| \to \|x\|$ נובע כי $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n|^2 \to \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$. אנחנו צריכים להוכיח כי $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n - a_k|^2 \to 0$ כאשר $n\to\infty$. ברור כי $|a_k^n - a_k|^2 \le |a_k^n|^2 + |a_k|^2$ ולכן עפ"י משפט ההתכנסות הנשלטת נובע כי $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n - a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty} |a_k^n - a_k|^2 = 0$.

3. תהי ν מידה סופית. הוכיחו כי ν הינה רציפה בהחלט ביחס למידה μ אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $\mu(A) < \delta$ אזי $\nu(A) < \varepsilon$ לכל קבוצה מדידה A . (הדרכה : לצד השני, הניחו בשלילה כי לכל $\delta = 2^{-k}$ קיימת A_n כך ש $\mu(A_n) < 2^{-k}$ אבל $\nu(A_n) > \varepsilon$. הסתכלו על הקבוצה $E_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$. מה המידה של $\mu(E_k)$ כאשר $k\to\infty$? מה המידה של $\nu(E_k)$ כאשר $k\to\infty$?

פתרון:

$\Rightarrow$: תהי A מדידה אזי אם $\mu(A) = 0$ אזי ברור כי $\nu(A) < \varepsilon$ לכל $\varepsilon > 0$ ולכן $\nu(A) = 0$

$\Leftarrow$: נניח בשלילה כי לכל $\delta = 2^{-k}$ קיימת A_n כך ש $\mu(A_n) < 2^{-k}$ אבל $\nu(A_n) > \varepsilon$. נסתכל על הקבוצה $E_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$, זוהי קבוצה יורדת, כלומר $E_k \supseteq E_{k+1}$, ולכן

$\mu(E_k) \le \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} \to 0$ כאשר $k\to\infty$ ואם נגדיר $E = \bigcap_k E_k$ אזי נובע כי $\mu(E_k) = 0$.

לעומת זאת, מכיוון ש ν סופית, נובע כי $\nu(E_k) < \infty$ ולכן עפ"י רציפות המידה נובע כי $\lim \nu(E_k) = \nu(E)$. אבל $\nu(E_k) > \varepsilon$ ולכן $\nu(E) > \varepsilon$ בסתירה לנתון כי ν הינה רציפה בהחלט ביחס למידה μ .

4. יהיו μ ו ν שתי מידות חיוביות כך ש $\mu \ll \nu$ ו $\mu = gd\nu$. הראו כי אם f פונקציה אינטגרבילית ביחס למידה μ אזי היא אינטגרבילית ביחס למידה ν ומתקיים

$$\int fgd\nu = \int fd\mu$$

פתרון: נרשום $f = f^+ + f^-$. נקרב את f^+ ע"י פונקציות פשוטות φ_n כך ש $\int \varphi_n d\mu \uparrow \int fd\mu$. נשים לב כי עבור כל פונקציית אינדיקטור מתקיים $\int 1_A fd\nu = \int 1_A d\mu$. ולכן הדבר נכון גם עבור פונקציות פשוטות. מכאן שמתקיים $\int f^+ gd\nu \overset{MCT}{=} \lim \int \varphi_n gd\nu = \lim \int \varphi_n d\mu = \int f^+ d\mu$. נראה את אותו הדבר עבור f^- וסיימנו.