תרגול 8

נושא השיעור: גבולות של פונקציות

הגדרת הגבול על פי קושי

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה $x=x_0$, פרט אולי לנקודה x_0 עצמה, מספר ממשי L נקרא גבול של $f(x)$ כאשר x שואף ל x_0 $(x \neq x_0)$. (נסמן $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$) אם לכל מספר ממשי $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$.

דוגמא

הראה לפי הגדרת קושי ש $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$.

פתרון

יהי $\varepsilon>0$ נתון. אזי $|f(x)-L|=\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{|1-x|}{2|-x-1|}=\frac{|x-1|}{2|-x+1-2|}\le\frac{|x-1|}{2\left||x-1|-2\right|}$.

כלומר, צריך למצוא $\delta>0$ כך שיתקיים $\frac{|x-1|}{2\left||x-1|-2\right|}\le\varepsilon$ לכל x המקיים $0<|x-1|<\delta$.

נסמן $a=|x-1|$ ואז נקבל $\frac{a}{2|a-2|}\le\varepsilon$. בכל מקרה נבחר $0<\delta<2$ ואז $\frac{a}{2|a-2|}=\frac{a}{4-2a}\le\varepsilon$ נפתור את האי שוויון ונקבל שעבור $\delta\le\frac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon}$ מתקיים $\frac{|x-1|}{2\left||x-1|-2\right|}\le\varepsilon$ לכל x המקיים $0<|x-1|<\delta$ כדרוש.

הגדרת הגבול של פונקציה לפי היינה

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה $x=x_0$, פרט אולי לנקודה x_0 עצמה, כלומר: קיים $\delta>0$ כך ש $f(x)$ מוגדרת בכל נקודה של הקטע $(x_0-\delta,x_0+\delta)$, חוץ אולי מהנקודה x_0 עצמה. בתוך הקטע $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ קיימות סדרות שונות של נקודות המתכנסות לגבול x_0. תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה נתונה שמוכלת בקטע הנתון, $x_n\neq x_0$, ושמתכנסת לגבול x_0. אם נפעיל את הפונקציה $f(x)$ על כל אחד מאיברי הסדרה נקבל סדרת מספרים חדשה $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$. מספר ממשי L ייקרא הגבול של $f(x)$ כאשר x שואף ל x_0 $(x\neq x_0)$. אם לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ שמתכנסת לגבול x_0 וש $x_n\neq x_0$ הסדרה $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול L.

הערה

בד"כ נשתמש בהגדרה על פי היינה כדי לשלול את קיום הגבול. פשוט נמצא שתי סדרות שונות שמתכנסות לגבול x_0 אבל לכל סדרה נקבל שהגבול של הסדרה $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ שונה.

דוגמא

הראה שלפונקציה $f(x)=\sin\frac{1}{x-2}$ אין גבול בנקודה $x=2$.

פתרון

ניקח שתי סדרות: סדרה 1 - $x_n=2+\frac{1}{\pi n}$, סדרה 2 - $y_n=2+\frac{2}{\pi+2\pi n}$.

נשים לב ש $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 2$.

מסדרה 1 נקבל

$$\lim_{n\to\infty}\left\{f\left(x_n\right)\right\}_{n=1}^{\infty} = \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{2+\frac{1}{\pi n}-2} = \lim_{n\to\infty}\sin\left(\pi n\right) = 0$$

מסדרה 2 נקבל

$$\lim_{n\to\infty}\left\{f\left(y_n\right)\right\}_{n=1}^{\infty} = \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{2+\frac{2}{\pi+4\pi n}-2} = \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) = 1.$$

<u>הערה</u>

בד"כ לא נשתמש ישירות בהגדרות כדי לחשב גבול של פונקציה אלא נשתמש במשפטים.

<u>כללי אריתמטיקה</u>

אם $\lim_{x\to x_0} g\left(x\right) = M, \lim_{x\to x_0} f\left(x\right) = L$

אז

1. $\lim_{x\to x_0}\left[f\left(x\right)\pm g\left(x\right)\right] = L\pm M$.
2. עבור מספר ממשי α מתקיים $\lim_{x\to x_0}\left[\alpha\cdot f\left(x\right)\right] = \alpha\cdot L$.
3. $\lim_{x\to x_0}\left[f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\right] = L\cdot M$.
4. אם $M\neq 0$ אז $\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right] = \frac{L}{M}$.

<u>שיטות לחישוב גבול של פונקציה</u>

<u>גבולות חשובים</u> - $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

<u>שיטה 1</u>

אם $g\left(x\right)$ פונקציה חסומה ו $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right) = 0$ אז $\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)g\left(x\right) = 0$.

<u>דוגמא</u>

1. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}\sin\frac{1}{x} = 0$.

<u>שיטה 2</u>

גבול מן הצורה $\frac{\infty}{\infty}$ - משיטה 1 נקבל ש $\lim_{x\to\infty}\frac{a}{x} = \lim_{x\to\infty} a\cdot\frac{1}{x} = 0$.

<u>דוגמא</u>

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{3x^3-2x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3+1}{x^3}}{\frac{3x^3-2x^2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{3-\frac{2}{x}} = 3.$$

<u>שיטה 3</u>

גבול מהצורה $\frac{0}{0}$ - בד"כ ניתן לצמצם ואז להציב את המספר הדרוש.

דוגמא

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)}{(x-1)}=\frac{1}{2}$$

שיטה 4

הכפלה בביטוי הצמוד. שימושי בד"כ שמופיע שורש ומתקיים גבול מהצורה $\frac{0}{0}$ או $\infty-\infty$.

דוגמאות

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\sqrt{4+x}+2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}=\frac{1}{4}$.

2.
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

שיטה 5

גבול מהצורה 1^∞ - בד"כ משתמשים בגבול $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

דוגמא

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{2+x-2}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{x-2}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\left(1+\frac{1}{\frac{2}{x-2}}\right)^{\frac{2}{x-2}\cdot\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$$

משפט (כלל הסנדביץ')

יהיו $f(x),g(x),h(x)$ שלושה פונקציות המוגדרות בסביבה מסוימת של הנקודה $x=x_0$, פרט אולי לנקודה x_0 עצמה. נניח כי לכל x בסביבה זו מתקיים $f(x)\le g(x)\le h(x)$, ונניח כי קיימים הגבולות $A=\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}h(x)$ אזי $\lim_{x\to x_0}g(x)=A$.

דוגמא

נתון כי $\lim_{x\to 1}f(x)=\infty$ וכי לכל $0<x<2$ מתקיים $|f(x)-g(x)|<3$. הוכח כי $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{f(x)}=1$.

פתרון

נשים לב ש $f(x)-3<g(x)<f(x)+3$ עבור $0<x<2$ ז"א קיימת סביבה לנקודה $x=1$ שעבורה

מתקיים $\frac{f(x)+3}{f(x)}<\frac{g(x)}{f(x)}<\frac{f(x)-3}{f(x)}$. מכיוון ש $\lim_{x\to 1} f(x)=\infty$ נקבל

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-3}{f(x)}=\lim_{x\to 1}\left(1-\frac{3}{f(x)}\right)=1$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+3}{f(x)}=\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{3}{f(x)}\right)=1$$

וממשפט הסנדביץ' נקבל $\lim_{x\to 1} g(x)=1$.

<u>גבולות חד צדדיים</u>

<u>הגדרה 1</u>

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה ימנית של הנקודה $x=x_0$, פרט אולי לנקודה x_0 עצמה, מספר ממשי L נקרא הגבול הימני של $f(x)$ כאשר x שואף ל x_0 מצד ימין $(x>x_0)$. (נסמן $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$) אם לכל מספר ממשי $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$.

<u>הגדרה 2</u>

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה שמאלית של הנקודה $x=x_0$, פרט אולי לנקודה x_0 עצמה, מספר ממשי L נקרא הגבול השמאלי של $f(x)$ כאשר x שואף ל x_0 מצד שמאל $(x<x_0)$. (נסמן $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$) אם לכל מספר ממשי $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-x_0|<\delta$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$.

<u>תרגיל</u>

חשב את הגבול הימני והגבול השמאלי של $f(x)=\frac{3}{5+4^{\frac{1}{x-6}}}$ בנקודה $x=6$.

<u>פתרון</u>

$\lim_{x\to 6^+}\frac{3}{5+4^{\frac{1}{x-6}}}=0$ וזאת מכיוון ש $\lim_{x\to 6^+} 4^{\frac{1}{x-6}}=\infty$.

$\lim_{x\to 6^-}\frac{3}{5+4^{\frac{1}{x-6}}}=\frac{3}{5}$ וזאת מכיוון ש $\lim_{x\to 6^-} 4^{\frac{1}{x-6}}=0$.

<u>הערה</u>

אם הגבולות החד – צדדיים בנקודה נתונה קיימים ושונים, אזי לא קיים הגבול של הפונקציה באותה נקודה.

<u>תרגיל</u>

תהיי $f(x)=\begin{cases} ax-2 & x>4 \\ -2 & x=4 \\ 3x^2+2a & x<4 \end{cases}$ כמו כן קיים $\lim_{x\to 4} f(x)$. מהו a? מהו הגבול?

<u>פתרון</u>

נתון שהגבול $\lim_{x\to 4} f(x)$ קיים ולכן $\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x)$ ז"א $4a-2=48+2a \Rightarrow a=25$ והגבול הוא 98.

<u>תרגיל</u>

הוכח כי לא קיים הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$.

<u>פתרון</u>

נשים לב ש $\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=1$ אבל $\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=-1$.

<u>רציפות של פונקציה</u>

<u>הגדרה</u>

תהיי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה $x=x_0$. נאמר כי $f(x)$ רציפה בנקודה $x=x_0$ אם מתמלאים שני התנאים:

א. קיים הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

ב. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

<u>תרגיל</u>

נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(a+b)x}{x} & x>0\\ 3 & x=0\\ \frac{x+a}{3x-b} & x<0\end{cases}$ מצא את הערכים a,b שעבורם הפונקציה $f(x)$ רציפה.

<u>פתרון</u>

כדי שהפונקציה $f(x)$ תהייה רציפה צריך להתקיים $f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ומכיוון ש $f(0)=3$ צריך להתקיים $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=3$ ז"א $\begin{cases}a+b=3\\ -\frac{a}{b}=3\end{cases}$

ואז $a=4.5, b=-1.5$.

<u>משפט ערך הביניים</u>

תהא f רציפה ב $[a,b]$, ונניח ש $f(a)<0, f(b)>0$ (או להפך) אז קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש $f(c)=0$.

<u>תרגיל</u>

תהיינה $f,g:[a,b]\to[a,b]$ פונקציות רציפות. הוכח כי אם g היא על, אז קיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש $f(c)=g(c)$.

<u>פתרון</u>

נגדיר את הפונקציה $h(x)=g(x)-f(x)$. נתון כי f,g הן פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ ולכן גם h רציפה בקטע $[a,b]$. (הפרש של פונקציות רציפות).

נתון כי g היא על $[a,b]$ ולכן קיים $x_a \in [a,b]$ כך ש $g(x_a) = a$.

נתון כי g היא על $[a,b]$ ולכן קיים $x_b \in [a,b]$ כך ש $g(x_b) = b$.

נניח ב.ה.ג.כ. ש $x_a < x_b$. מכאן ש

$h(x_a) = g(x_a) - f(x_a) = a - f(x_a) \le 0$.

$h(x_b) = g(x_b) - f(x_b) = b - f(x_b) \ge 0$.

h פונקציה רציפה עבור $[a,b]$ ובפרט רציפה עבור $[x_a, x_b]$ ולכן על פי משפט ערך הביניים קיימת נקודה $x_a \le c \le x_b$ כך ש $h(c) = 0$.