

**83-110 אלגברה ליניארית**  
**סמסטר א', תשס"ה—מועד א'**  
**31.01.05**

לקבלת כל הנקודות הציגו את כל העבודה הדרושה בפתרון. יש לנמק כל חישוב נדרש. חומר עזר ומחשבי כיס אינם מותרים. משך הבחינה 2.5 שעות. בהצלחה!!

1. [20 נק'] תהי  $A$  המטריצה ה- $4 \times 6$  הבאה:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a. על ידי דירוג, פרקי את  $A$  למכפלה של  $L$   $4 \times 4$  כפול  $U$   $4 \times 6$ .

b. מצאו את הדרגה של  $A$  ובסיס למרחב האפס  $N(A)$ .  
(הפתרונות המיוחדים הם תשובה טובה.)

2. [20 נק'] אמת או שקר. אין צורך להסבר הפתרון. 4 נקודות לתשובה נכונה, -1 לכל טעות:

a. תהי  $A$  מטריצה  $n \times n$  ריבועית עם פירוק  $A = LU$ , כאשר  $U$  משולשת עליון, ו- $L$  משולשת תחתון עם 1-ים על האלכסון. הדטרמיננטה של  $A =$  מכפלת הצירים של  $U$ .

b. תהי  $A$  מטריצה  $m \times n$  עם עמודות בלתי-תלויות ליניאריות.  $AA^T$  היא מטריצה חיובית.

c. אם  $A$  היא מטריצה סימטרית, כל שני ווקטורים עצמיים של  $A$  הם ניצבים.

d. המרחב האפס השמאלי של  $A$  מוכל במרחב האפס השמאלי של  $AB$ .

e. אם  $A^k$  מתקרב למטריצת האפס  $\mathbf{0}_{n,n}$  כאשר  $k \rightarrow \infty$ , אז כל ערך עצמי  $\lambda_i$  של  $A$  מקיים  $|\lambda_i| < 1$ .

3. [20 נק'] תהי  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ .

- a. מצא/י בסיס אורתונורמאלי ל  $C(A)$ .  
 b. כתב/י פירוק  $A = QR$  כאשר  $Q$  אורתוגונאלית ו  $R$  משולשת עליון.  
 c. הווקטור  $\mathbf{b} = (4, 1, 2)$  אינו במרחב העמודות של  $A$ . השתמשו ב. למצוא הווקטור  $\mathbf{p} \in C(A)$  הכי קרוב ל  $\mathbf{b}$ .

4. [20 נק'] תהי  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ .

- a. עבור איזה  $c$  מתקיים ש  $cA$  היא מטריצה אורתוגונאלית?  
 b. העזר בזה לחשב את הדטרמיננטה של  $A$  בלי פיתוח כלשהו.  
 c. מצא/י את  $A^{-1}$ .

5. [20 נק'] תהי  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ . נתון שהערכים העצמיים של  $A$  הם

$-2, 2, 5$ . מצא/י פירוק אורתונורמלי ל  $A = QDQ^T$ .