ב"ש בדידה תשעז מועד ב

1. תהיינה שתי פונקציות $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. נגיד ש f <u>מתאימה</u> ל g אם

$$\forall x_1\in\mathbb{R}\exists x_2\in\mathbb{R}\,:\,f\left(g(x_1)\right)=g\left(f(x_2)\right)$$

פתרון: פונקציה f היא מתאימה לפונקציה g אם לכל x_1 קיים x_2 עבורו מתקיים $f\left(g(x_1)\right)=g\left(f(x_2)\right)$. השלילה הלוגית היא

$$\exists x_1\in\mathbb{R}\forall x_2\in\mathbb{R}\,:\,f\left(g(x_1)\right)\neq g\left(f(x_2)\right)$$

כלומר שקיים x_1 כך שלכל x_2 שגדול ממנו מתקיים $f(x_1)>f(x_2)$

(א) האם $f(x)=|x|$ מתאימה ל $g(x)=\sin(x)$?
פתרון: כן. הוכחה: יהא x_1 ממשי.

$$f\left(g(x_1)\right)=|\sin(x_1)|$$

שזהו מספר בין 0 ל 1. מצד שני $g\left(f(x)\right)=\sin|x|$ ומכיוון שבקרן החיובית $(0,\infty)$, הפונקציה $\sin$ מקבלת כל ערך בין -1 ל 1 נסיק שקיים x_2 חיובי עבורו $\sin(x_2)$ שווה לערך של $|\sin(x_1)|$ ואז נקבל ש

$$g\left(f(x_2)\right)=\sin|x_2|=\sin\left(x_2\right)=|\sin(x_1)|=f\left(g(x_1)\right)$$

כנדרש.

(ב) האם $f(x)=x^2$ מתאימה ל $g(x)=-e^x$?
פתרון: לא. למשל עבור $x_1=0$ מתקיים כי

$$f\left(g(x_1)\right)=\left(-e^{x_1}\right)^2=e^{2x_1}=e^0=1>0$$

ונראה ש

$$\forall x_2\in\mathbb{R}\,:\,f\left(g(x_1)\right)\neq g\left(f(x_2)\right)$$

(המשך שלילת הפסוק שמגדיר פונקציה מתאימה). אכן, יהא x_2 ממשי

$$g\left(f(x_2)\right)=-e^{(x_2)^2}<0$$

ולכן בפרט

$$f\left(g(x_1)\right)=1\neq g\left(f(x_2)\right)<0$$

כמו שרצינו להוכיח.

(ג) תהיינה פונקציות כך ש f מתאימה ל g. האם בהכרח g מתאימה ל f?

פתרון: לא, $f(x)=|x|$ ו $g(x)=\sin(x)$. ראינו ש f מתאימה ל g בסעיף הראשון. נראה ש g אינה מתאימה ל f. אכן:

$$g\left(f(x)\right)=\sin|x|$$

ולכן עבור $x_1=\frac{3\pi}{2}$ נקבל ש $g\left(f(x_1)\right)=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$. כעת, לכל x_2 מתקיים

$$f\left(g(x_2)\right)=|\sin(x_2)|\geq 0$$

ובפרט, לכל x_2 מתקיים

$$g\left(f(x_1)\right)\neq f\left(g(x_2)\right)$$

2. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) לכל שתי קבוצות A,B אם $A\backslash B=B\backslash A$ אז $A=B$.
פתרון: הוכחה: נניח כי $A\backslash B=B\backslash A$ ואז

$$B=(B\backslash A)\cup(B\cap A)\underbrace{=}_{\text{לפי ההנחה}}(A\backslash B)\cup(A\cap B)\underbrace{=}_{\text{האיברים ב A הם האיברים ב A שאינם ב B איחוד האיברים שב A וגם ב B}}A$$

(ב) לכל שלוש קבוצות A,B,C מתקיים $A\cup(B\backslash C)\subseteq(A\cup B)\backslash C$.
פתרון: הפרכה:

$$A=B=C=\{1\}$$

ואז

$$A\cup(B\backslash C)=A\cup(\emptyset)=A=\{1\}\nsubseteq\emptyset=C\backslash C=(A\cup B)\backslash C$$

(ג) לכל שלוש קבוצות A,B,C אם $A\subseteq C$ אז $C\backslash B\subseteq A\backslash B$.
פתרון: הפרכה:

$$A=B=\emptyset,\ C=\{1\}$$

ואז $A\subseteq C$ כי קבוצה ריקה מוכלת (שווה) בכל קבוצה אבל

$$C\backslash B=C=\{1\}\nsubseteq\emptyset=A\backslash B$$

.3

(א) הוכיחו כי לכל $n\geq 3$ מתקיים כי $2n+1\leq 2^n$.
פתרון: הוכחה:

- בסיס $n=3$: אכן, $2\cdot 3+1=7\leq 8=2^3$.
- צעד: נניח נכונות עבור $3\leq n$, כלומר, $2n+1\leq 2^n$. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר, $2\left(n+1\right)+1\leq 2^{n+1}$. מתקיים

$$2\left(n+1\right)+1=\left(2n+1\right)+2\underbrace{\leq}_{\text{הנחת האינדוקציה}}2^n+2\underbrace{\leq}_{n\geq 3}2^n+2^n=2^n\cdot 2=2^{n+1}$$

כמו שרצינו.

(ב) הוכיחו כי לכל $n\geq 4$ מתקיים כי $n^2\leq 2^n$.
פתרון: הוכחה:

- בסיס $n=4$: אכן, $4^2=16\leq 16=2^4$.

- צעד: נניח נכונות עבור $3 \leq n$, כלומר, $n^2 \leq 2^n$. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר, $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$. מתקיים

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \underbrace{\leq}_{\text{הנחת האינדוקציה}} 2^n + 2n + 1 \underbrace{\leq}_{\text{סעיף קודם}} 2^n + 2^n = 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$$

כמו שרצינו.

4. תהיינה $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $f \circ g$ הפיכה ו f חח"ע אזי f הפיכה.
פתרון: הוכחה:
בהנחה ש $f \circ g$ הפיכה אזי בפרט היא על ולכן f על. אם נניח בנוסף ש f חח"ע נקבל ש f חח"ע +על ולכן הפיכה.

(ב) אם $f \circ g$ אינה חח"ע אזי g אינה חח"ע.
פתרון: הפרכה: נבחר $g = Id$ (הפיכה ולכן חח"ע) ו f פונקציה קבועה $f(n) = 1$ אזי: נקבל ש $f \circ g$ גם קבועה (כי $f(g(n)) = f(n) = 1$) ולכן לא חח"ע.

(ג) אם f חח"ע ו $f + g$ חח"ע אזי g חח"ע.
פתרון: הפרכה: נגדיר $f = Id$ אזי fהפיכה ובפרט חח"ע. נגדיר g להיות הפונקציה הקבועה $g(n) = 1$ שאינה חח"ע. בנוסף

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n) = n + 1$$

כלומר הפונקציה ששולחת את n ל $n+1$ שהיא חח"ע.

5. בכמה סדרות באורך 10 המורכבות מהאותיות א', ב' וג':

(א) האות א' מופיע בדיוק פעם אחת.
פתרון: מספר הסדרות באורך 9 המורכבת מאותיות ב' וג' הוא 2^9 ולכן התשובה לשאלה היא

$$\underbrace{2^9}_{\text{סדרה באורך 9 עם שאר האותיות}} \cdot \underbrace{10}_{\text{מיקומים אפשרים לאות א'}}$$

(ב) האות א' מופיע לפחות פעם אחת.
פתרון: מספר כל הסדרות באורך 10 עם אותיות א', ב' וג' הוא 3^{10}. מספר הסדרות בהם א' לא מופיע כלל הוא 2^{10} (סדרות באורך 10 עם אותיות ב' וג') ולכן מספר הסדרות בהן א' מופיע לפחות פעם אחת הוא

$$3^{10} - 2^{10}$$

(ג) האות ג' אינה מופיעה, והאות א' מופיעה בדיוק 3 פעמים.
פתרון: בחירת 3 מקומות לאות א' הוא $\binom{10}{3}$. שאר המקומות חייבים להיות האות ב' ו(כי אין אות ג' בסדרה) ולכן ברגע שקובעים מה המקומות של האות א' הסדרה נקבעת. לכן התשובה לשאלה היא $\binom{10}{3}$.