

תרגיל בית 3 במתמטיקה בדידה 2

83-118 סמסטר ב' תשע"ו

20 במרץ 2016

1. בדרך קומבינטורית, קל לראות שהמקדם הבינומי $\binom{n}{k}$ הוא מספר טבעי (ולא שבר), כי הוא סופר את מספר הדרכים לבחור k עצמים מתוך קבוצה בת n עצמים ללא חשיבות לסדר וללא חזרה. הוכיחו זאת בדרך אלגברית באופן הבא: תחילה הוכיחו את נוסחת פסקל בדרך אלגברית:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

כעת, העזרו באינדוקציה (על n ו- k) כדי להסיק שהמקדם הבינומי הוא מספר שלם.

2. א. מה מספר הדרכים להושיב 16 אנשים, כך ש-6 יושבים סביב שולחן עגול אחד והיתר סביב שולחן עגול אחר?
ב. מה מספר הדרכים להושיב 16 אנשים, כך ש-6 יושבים סביב שולחן עגול אחד והיתר על ספסל?

3. למסיבת פורים של המחלקה הגיעו 52 סטודנטים. בקבוקי היין שעומדים ברשותינו הם: 13 בקבוקי קברנה סוביניון, 22 בקבוקי יין לבן חצי יבש ו-17 בקבוקי מוסקט של יין הגולן. רוצים שכל סטודנט יקבל בדיוק בקבוק אחד. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

4. ועדת פרס רוצה לחלק סכום של 10000 ש"ח בין 10 זוכים. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת אם:
א. הפרסים הם מספרים שלמים אי-שליליים?
ב. הפרסים הם מספרים שלמים חיוביים ממש (לא אפסים)?
ג. המספרים הם שלמים אי-שליליים בכפולות של 100?

5. תהי A קבוצה עם $|A| = n$, ו- R יחס סדר מלא על A (כלומר, לכל $a, b \in A : aRb \vee bRA$). מצא את $|R|$.

6. לפנינו n כדורים שקופים זהים, n כדורים צבעוניים (לא שקופים, כל אחד בצבע שונה), ו- $2n$ תאים ממוספרים מ-1 עד $2n$. בכמה דרכים ניתן לחלק את הכדורים לתאים כך שבכל תא:
א. לכל היותר כדור שקוף אחד.
ב. לכל היותר כדור צבעוני אחד.
ג. לכל הפחות שני כדורים שקופים.

7. שאלת רשות: בחברה עובדים 11 עובדים עם גישה לכספת. הם לא סומכים אחד על השני ורוצים לודא שהכספת תפתח רק אם לפחות 6 עובדים נוכחים. כדי למלא אחר מטרה זו ניתן לשים על הכספת כמה מנעולים, ולחלק לכל עובד מפתחות של חלק מן המנעולים. כמה מנעולים צריך, וכמה מפתחות לחלק לכל עובד (נסו להמעיט כמה שניתן).