פתרון תרגיל בית 3

שאלה 1

יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח: AB הפיכה $\Leftrightarrow$ A הפיכה וגם B הפיכה.

פתרון

הערה

ראינו בהרצאה שאם $C,D\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $CD=I$ אז $DC=I$ ו C,D מטריצות הפיכות.

$\Leftarrow$

נתון ש AB מטריצה הפיכה ולכן קיימת מטריצה C כך ש $C(AB)=(AB)C=I$.

מהאסוציאטיביות בכפל מטריצות נקבל ש $I=(AB)C=A(BC)$ ומההערה נקבל ש A הפיכה והמטריצה BC היא ההופכית שלה.

מהאסוציאטיביות בכפל מטריצות נקבל ש $I=C(AB)=(CA)B$ ומההערה נקבל ש A הפיכה והמטריצה BC היא ההופכית שלה.

$\Rightarrow$

נתון ש A הפיכה ולכן קיימת מטריצה A^{-1} כך $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

נתון ש B הפיכה ולכן קיימת מטריצה B^{-1} כך $BB^{-1}=B^{-1}B=I$.

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)=\left(A\left(BB^{-1}\right)\right)A^{-1}=(A\cdot I)\cdot A^{-1}=AA^{-1}=I$$

קיבלנו ש AB מטריצה הפיכה וההופכית שלה היא $B^{-1}A^{-1}$.

שאלה 2

יהיו $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\\2&4&3\end{pmatrix}$ מצא שתי מטריצות הפיכות P,Q כך ש $B=PAQ$.

פתרון

נבצע פעולות עמודה אלמנטאריות עד שנקבל את המטריצה B .

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&6\end{pmatrix}\overset{C_3-C_2\to C_3}{\approx}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&1\\3&4&2\end{pmatrix}\overset{C_1\leftrightarrow C_3}{\approx}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\\2&4&3\end{pmatrix}$$

המטריצה האלמנטארית המתאימה לפעולת העמודה $C_3-C_2\to C_3$ היא

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

המטריצה האלמנטארית המתאימה לפעולת העמודה $C_1\leftrightarrow C_3$ היא

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

מכיוון שעבור פעולת עמודה אלמנטארית ρ ומטריצה כלשהי A מתקיים $\rho(A)=A\rho(I)$ נקבל ש

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ואז

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 3

א. מצא את המטריצה ההופכית של המטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

ב. חשב את המטריצה ההופכית (מעל $\mathbb{Z}_5$) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

פתרון

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{R_1-2R_2\to R_2 \\ R_1-2R_3\to R_3 \\ R_1-2R_4\to R_4}}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{R_2+R_3\to R_3 \\ R_2+R_4\to R_4}}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \overset{\substack{-\frac{1}{2}R_4\to R_4 \\ -\frac{1}{2}R_3\to R_3 \\ -R_2\to R_2 \\ \frac{1}{2}R_1\to R_1}}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1.5 & 2 & 2.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{R_1-2.5R_4\to R_1 \\ R_2-3R_4\to R_2 \\ R_3-2R_4\to R_3}}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1.5 & 2 & 0 & 3 & -2.5 & 0 & -2.5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{R_1-2R_3\to R_1 \\ R_2-2R_3\to R_2}}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1.5 & 0 & 0 & 1 & -0.5 & -2 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{R_1-1.5R_2\to R_1}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ב.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\3&1&2&0&1&0\\2&3&1&0&0&1\end{array}\right)\overset{\substack{2R_1+R_2\to R_2\\3R_1+R_3\to R_3}}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&0&3&2&1&0\\0&4&0&3&0&1\end{array}\right)\overset{R_2\leftrightarrow R_3}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&4&0&3&0&1\\0&0&3&2&1&0\end{array}\right)\overset{\substack{2R_3\to R_3\\4R_2\to R_2}}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&0&2&0&4\\0&0&1&4&2&0\end{array}\right)$$

$$\overset{R_1+3R_2\to R_1}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&2&0&2\\0&1&0&2&0&4\\0&0&1&4&2&0\end{array}\right)\overset{R_1+2R_3\to R_3}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&4&2\\0&1&0&2&0&4\\0&0&1&4&2&0\end{array}\right)$$

<u>שאלה 4</u>

תהיינה A ו B מטריצות ריבועיות מאותו סדר, כך שמתקיים $A^3=I$ ו $BA=A(A+I)$.

א. הוכיחו כי $A^{-1}=A^2$.

ב. הוכיחו כי $B=A+I$.

ג. הוכיחו כי $BABA=A^2B^2$

<u>פתרון</u>

א. $A^3=A^2A=AA^2=I\Rightarrow A^2=A^{-1}$

ב.

$$BA=A(A+I)=A^2+AI=A^2+A$$
$$\Rightarrow BAA^{-1}=BI=B=\left(A^2+A\right)A^{-1}=A^2A^{-1}+AA^{-1}=A+I$$

ג.

$$BABA=\left[A\left(A+I\right)\right]^2=\left(A^2+A\right)^2+A^4+2A^3+A^2=A^2(A^2+2A+I)=A^2\left(A+I\right)^2=A^2B^2$$

<u>שאלה 5</u>

נסמן $T_\varphi=\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}$.

א. הוכח כי לכל α,β ממשיים מתקיים $T_\alpha\cdot T_\beta=T_{\alpha+\beta}$.

ב. הוכח כי לכל α ממשי מתקיים $T_\alpha^{-1}=T_{-\alpha}$.

ג. תנו דוגמא למטריצה A 2×2, כך שמתקיים $A^6=I$.

<u>פתרון</u>

א.

$$T_\alpha T_\beta=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta&-\sin\beta\\\sin\beta&\cos\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta&-\left(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta\right)\\\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta&-\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix}=$$

$$\left[\sin\left(\alpha\pm\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,\ \cos\left(a\pm\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\right]$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\left(\alpha+\beta\right)&-\sin\left(\alpha+\beta\right)\\\sin\left(\alpha+\beta\right)&\cos\left(\alpha+\beta\right)\end{pmatrix}=T_{\alpha+\beta}$$

ב.

נשתמש בנוסחה $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

ובכך ש $\cos(-\alpha)=\cos(\alpha),\ \sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$

$$T_\alpha^{-1} = \frac{1}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = T_{-\alpha}$$

ג.

ע"פ סעיף א מתקיים $T_\alpha^6 = T_{6\alpha}$. לכן אם נבחר $\alpha=\frac{\pi}{3}$ אזי נקבל:

$$T_{\frac{\pi}{3}}^6 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>שאלה 6</u>

יהא $\mathbb{R}^2$ עם פעולת חיבור וקטורים הרגילה. בכל אחד מהסעיפים הבאים מוצעת הגדרה לכפל בסקלר. בדוק האם ההצעה אכן נותנת מרחב וקטורי.

א. $\alpha(x,y)=(\alpha x,y)$.

ב. $\alpha(x,y)=(\alpha x,0)$.

ג. $\alpha(x,y)=(\alpha^2 x,\alpha^2 y)$.

ד. $\alpha(x,y)=(0,0)$.

<u>פתרון</u>

א. ההצעה לא נותנת מרחב וקטורי. אם $y\neq 0$:
$(1+1)(x,y)=(x,y)+(x,y)=(2x,2y)\neq(2x,y)$.

ב. ההצעה לא נותנת מרחב וקטורי. אם $y\neq 0$:
$(1+1)(x,y)=(x,y)+(x,y)=(2x,2y)\neq(2x,0)$.

ג. ההצעה לא נותנת מרחב וקטורי. אם $y,x\neq 0$
$(1+1)(x,y)=(x,y)+(x,y)=(2x,2y)\neq(4x,4y)$.

ד. ההצעה לא נותנת מרחב וקטורי. אם $y\neq 0$:
$(1+1)(x,y)=(x,y)+(x,y)=(2x,2y)\neq(0,0)$.

<u>שאלה 7</u>

אם U,V מרחבים וקטורים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$, אפשר להגדיר את מרחב המכפלה $U\times V$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, בצורה הבאה:

- $U\times V := \{(u,v) : u\in U, v\in V\}$.

- סכום וקטורים לפי רכיבים $(u_1,v_1)+(u_2,v_2):=(u_1+_U u_2, v_1+_V v_2)$.
- כפל סקלרי - $\alpha(u,v):=(\alpha u,\alpha v)$.

הוכח שמרחב המכפלה הוא אכן מרחב וקטורי.

<u>פתרון</u>

כדי להוכיח שמרחב המכפלה הוא מרחב וקטורי יש להראות שכל האקסיומות מתקיימות:

<u>סגירות החיבור</u>

יהיו $(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in U\times V$ ז"א $u_1,u_2\in U\wedge v_1,v_2\in V$ מכיוון ש U,V מרחבים וקטורים $v_1+_v v_2\in V$ $u_1+_u u_2\in U\wedge$ ולכן $(u_1,v_1)+_{U\times V}(u_2,v_2)=(u_1+_u u_2,v_1+_v v_2)\in U\times V$.

<u>קיבוץ</u>

יהיו $(u_1,v_1),(u_2,v_2),(u_3,v_3)\in U\times V$ ז"א $u_1,u_2,u_3\in U\wedge v_1,v_2,v_3\in V$ מכיוון ש U,V מרחבים וקטורים $(u_1+_u u_2)+_u u_3=u_1+_u(u_2+_u u_3)\wedge(v_1+_u v_2)+_u v_3=v_1+_u(v_2+_u v_3)$.

$$\left((u_1,v_1)+_{U\times V}(u_2,v_2)\right)+_{U\times V}(u_3,v_3)=(u_1+_u u_2,v_1+_v v_2)+_{U\times V}(u_3,v_3)=$$
$$=\left((u_1+_u u_2)+_u u_3,(v_1+_v v_2)+_v v_3\right)=\left(u_1+_u(u_2+_u u_3),v_1+_u(v_2+_u v_3)\right)=$$
$$=(u_1,v_1)+_{U\times V}\left((u_2,v_2)+_{U\times V}(u_3,v_3)\right)$$

<u>איבר ניטרלי</u>

מכיוון ש U,V מרחבים וקטורים קיימים $0_U\in U\wedge 0_V\in V$ כך שלכל $u\in U,v\in V$ מתקיים $u+_u 0_U=u\wedge v+_v 0_V=v$. מכיוון ש $0_U\in U\wedge 0_V\in V$ נקבל ש $(0_U,0_V)\in U\times V$. יהי $(u,v)\in U\times V$ איבר כלשהו ז"א $u\in U\wedge v\in V$.

$(u,v)+_{U\times V}(0_U,0_V)=(u+_U 0_U,v+_V 0_V)=(u,v)$.

<u>איבר נגדי</u>

יהי $(u,v)\in U\times V$ איבר כלשהו ז"א $u\in U\wedge v\in V$. מכיוון ש U,V מרחבים וקטורים קיימים $-u\in U,-v\in V$ כך ש $-u+_u u=0\wedge -v+_v v=0$ מכיוון ש $-u\in U,-v\in V$ נקבל ש $(-u,-v)\in U\times V$. $(-u,-v)+_{U\times V}(u,v)=(-u+_U u,-v+_V v)=(0_U,0_v)$.

<u>חילוף</u>

יהיו $(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in U\times V$ ז"א $u_1,u_2\in U\wedge v_1,v_2\in V$ מכיוון ש U,V מרחבים וקטורים $u_1+_u u_2=u_2+_u u_1\wedge v_1+_v v_2=v_2+_v v_1$ ולכן

$(u_1,v_1)+_{U\times V}(u_2,v_2)=(u_1+_u u_2,v_1+_v v_2)=(u_2+_u u_1,v_2+_v v_1)=(u_2,v_2)+_{U\times V}(u_1,v_1)$.

<u>כפל בסקלר</u>

<u>סגירות</u>

יהי $(u,v)\in U\times V$ איבר כלשהו ויהי $\alpha\in F$ ז"א $u\in U\wedge v\in V$. מכיוון ש U,V מרחבים וקטורים $\alpha u\in U\wedge\alpha v\in V$. $\alpha(u,v)=(\alpha u,\alpha v)\in U\times V$.

<u>קיבוץ</u>

יהי $(u,v)\in U\times V$ איבר כלשהו ויהיו $\alpha,\beta\in F$. $u\in U\wedge v\in V$. מכיוון ש U,V מרחבים וקטורים $(\alpha\beta)u=\alpha(\beta u)\wedge(\alpha\beta)v=\alpha(\beta v)$.

$(\alpha\beta)(u,v)=\left((\alpha\beta)u,(\alpha\beta)v\right)=\left(\alpha(\beta u),\alpha(\beta v)\right)=\alpha(\beta u,\beta v)=\alpha\left(\beta(u,v)\right)$.

<u>כפל יחידה</u>

יהי $(u,v)\in U\times V$ איבר כלשהו. ז"א $u\in U\wedge v\in V$. מכיוון ש U,V מרחבים וקטורים $1\cdot u=u\wedge 1\cdot v=v$. $1\cdot(u,v)=(1\cdot u,1\cdot v)=(u,v)$.

פילוג

יהיו $(u_1,v_1),(u_2,v_2)\in U\times V$ ויהי $\alpha\in F$ ז"א $u_1,u_2\in U\wedge v_1,v_2\in V$. מכיוון ש U,V מרחבים וקטורים $\alpha(u_1+u_2)=\alpha u_1+\alpha u_2\wedge\alpha(v_1+v_2)=\alpha v_1+\alpha v_2$.

$$\alpha\left((u_1,v_1)+(u_2,v_2)\right)=\alpha\left((u_1+u_2),(v_1+v_2)\right)=\left(\alpha(u_1+u_2),\alpha(v_1+v_2)\right)=$$
$$=\left((\alpha u_1+\alpha u_2),(\alpha v_1+\alpha v_2)\right)=(\alpha u_1,\alpha v_1)+(\alpha u_2,\alpha v_2)=\alpha(u_1,v_1)+\alpha(u_2,v_2).$$

יהי $(u,v)\in U\times V$ איבר כלשהו ויהיו $\alpha,\beta\in F$. $u\in U\wedge v\in V$. מכיוון ש U,V מרחבים וקטורים $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u\wedge(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$.

$$(\alpha+\beta)(u,v)=\left((\alpha+\beta)u,(\alpha+\beta)v\right)=(\alpha u+\beta u,\alpha v+\beta v)=$$
$$=(\alpha u,\alpha v)+(\beta u,\beta v)=\alpha(u,v)+\beta(u,v).$$

שאלה 8

א. בדוק האם הוקטורים הבאים תלויים ליניארית ב $\mathbb{R}[x]$ מעל $\mathbb{R}$:

$$f_1(x)=1+3x+x^2-2x^3-3x^4,\ f_2(x)=1+4x+3x^2-x^3-4x^4$$
$$f_3(x)=2+3x-4x^2-7x^3-3x^4,\ f_4(x)=3+8x+x^2-7x^3-8x^4$$

ב. מצא לאילו ערכים של a יהיו הוקטורים הבאים בלתי תלויים ליניארית ב $\mathbb{R}^3$:

$v_1=(1,2,a),v_2=(2a+1,2,3),v_3=(2,4,a-1)$.

פתרון

א.

נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix}1&3&1&-2&-3\\1&4&3&-1&-4\\2&3&-4&-7&-3\\3&8&1&-7&-8\end{pmatrix}\underset{\substack{R_1-R_2\to R_2\\2R_1-R_3\to R_3\\3R_1-R_4\to R_4}}{\approx}\begin{pmatrix}1&3&1&-2&-3\\0&-1&-2&-1&1\\0&3&6&3&-3\\0&1&2&1&-1\end{pmatrix}$$

ע"י פעולת השורה $R_2+R_4\to R_4$ נקבל שורת אפסים ולכן הוקטורים תלויים ליניארית.

ב.

נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix}1&2&a\\2a+1&2&3\\2&4&a-1\end{pmatrix}\underset{\substack{2R_1-R_3\to R_3\\(2a+1)R_1-R_2\to R_2}}{\approx}\begin{pmatrix}1&2&a\\0&4a&2a^2+a-3\\0&0&a+1\end{pmatrix}$$

כאשר $a\neq-1,a\neq0$ נקבל שהוקטורים בת"ל.

שאלה 9

יהי $\mathbb{R}^2$ עם פעולות החיבור והכפל הבאות:

- פעולת חיבור: לכל $P_1,P_2\in\mathbb{R}^2$ נגדיר $P_1\oplus P_2$ להיות אמצע הקטע P_1P_2.

- פעולת כפל בסקלר: לכל $P \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$ נגדיר $t \otimes P$ להיות סיבוב הוקטור $\overrightarrow{OP}$ t רדיאנים נגד כיוון השעון.

א. חשב את הביטויים הבאים:
- $(1,7) \oplus (8,3)$.
- $\pi \otimes (1,3)$.
- $\left(\frac{\pi}{2} \otimes (1,1)\right) + \left(\frac{\pi}{4} \otimes (0,2)\right)$.

ב. האם $\mathbb{R}^2$ עם פעולות החיבור והכפל שהגרנו בשאלה הוא מרחב וקטורי מעל שדה הממשיים? הוכח את תשובתך!!!

<u>פתרון</u>

<u>סעיף א</u>

$(1,7) \oplus (8,3) = (4.5,5)$, $\pi \otimes (1,3) = (-1,-3)$,

$\left(\frac{\pi}{2} \otimes (1,1)\right) + \left(\frac{\pi}{4} \otimes (0,2)\right) = (-1,1) + \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = \left(-1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right)$.

<u>סעיף ב</u>

המבנה הנתון הוא לא מרחב וקטורי מעל שדה הממשיים. נתבונן ב $(0,0),(0,4),(0,8) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left((0,0)+(0,4)\right)+(0,8) = (0,2)+(0,8) = (0,5)$$

$$(0,0)+\left((0,4)+(0,8)\right) = (0,0)+(0,6) = (0,3)$$

<u>שאלה 10</u>

בכל אחד מהסעיפים הבאים, בדוק האם הנפרש שווה לקבוצה המושווית אליו. אם כן, בטא איבר כללי של הקבוצה באמצעות הוקטורים הנתונים. אם לא, מצא איבר שנמצא בקבוצה ולא בנפרש:

א. $\mathbb{R}^3 \stackrel{?}{=} span\left\{(2,0,4),(0,1,0),(6,5,12)\right\}$.

ב. $\mathbb{R}_3[x] \stackrel{?}{=} span\left\{1, x+x^2, 4x^3+x^2, 2x\right\}$.

ג. $\mathbb{R}^{2\times2} \stackrel{?}{=} span\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5 & 3\\3 & 5\end{pmatrix}\right\}$

<u>פתרון</u>

<u>סעיף א</u>

הנפרש לא שווה לקבוצה המושווית אליו.

$$(0,0,1) \notin span\left\{(2,0,4),(0,1,0),(6,5,12)\right\}$$

מכיוון שאם $(0,0,1) \in span\left\{(2,0,4),(0,1,0),(6,5,12)\right\}$ אז היינו מקבלים $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ כך ש $\alpha(2,0,4) + \beta(0,1,0) + \gamma(6,5,12) = (0,0,1)$ אבל לא ייתכן ש $2\alpha + 6\gamma = 0 \wedge 4\alpha + 12\gamma = 1$.

<u>סעיף ב</u>

הנפרש שווה לקבוצה המושווית אליו.

$$\mathbb{R}_3[x] = span\left\{1, x+x^2, 4x^3+x^2, 2x\right\}$$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_0 \cdot 1 + \left(a_2 - \frac{1}{4}a_3\right)\left(x + x^2\right) + \frac{1}{4}a_3\left(4x^3 + x^2\right) + \left(\frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{8}a_3\right)\cdot(2x)$$

<u>סעיף ג</u>

הנפרש לא שווה לקבוצה המושווית אליו

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\right\}$$

מכיוון שאם $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\right\}$ אז היינו מקבלים

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ כך ש

$$\alpha + \beta + 5\delta = 0, 2\alpha + \beta + 5\delta = 1 \rightarrow \alpha = 1$$

$$2\alpha - \beta + \gamma + 3\delta = 0, \alpha - \beta + \gamma + 3\delta = 0 \rightarrow \alpha = 0$$