סדרות

(X,d) מרחב מטרי.

הגדרה

סדרה בX היא פונקציה $x(\cdot):\mathbb{N}\to X$. סימון נוח: $x(n)\doteqdot x_n\in X$ לכל $n=1,2,...$

הגדרה

הטווח של הסדרה $X \supseteq \{x_n\}=\{x_1,x_2,...\}$.

סדרה קבועה - $x_n=x\in X$ לכל $n\in\mathbb{N}$, $\{x\}$ = הטווח.

$x_n=(-1)^n\in\mathbb{R}$ - הטווח =$\{1,-1\}$

הגדרה

הסדרה $\{x_n\}$מתכנסת בX אם קיים $x\in X$ כך ש$d(x_n,x)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

כלומר: לכל $\epsilon>0$ קיים $n=n(\epsilon)$ טבעי כך ש$d(x_n,x)<\epsilon$ לכל $n>n(\epsilon)$.

סדרה לא מתכנסת נקראת סדרה מתבדרת.

דוגמה

סדרה קבועה בX ($\forall n, x_n=x$) מתכנסת לx(כי $d(x_n,x)=0\to 0$). כמ"כ נכון לכל סדרה החל מאינדקס מסויים.

אם x_n מתכנסת, אזי ה"x" בהגדרה נקבע באופן יחיד, כי אם גם $x'\in X$ מקיימת את התנאי בהגדר

$$0\le d(x,x')\le d(x,x_n)+d(x_n,x')$$

$$d(x,x')=0$$

$$x=x'$$

הגדרה

הנקודה x(הנ"ל) נקראת הגבול של הנ"ל, ומסמנים $x=\lim x_n$ או $x_n\to x$(קרי: x_n שואף לx)

תכונות של גבולות

א) אם $x_n \to x, y_n \to y$, אזי $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$
הוכחה:

$$d(x_n, y_n) \le d(x_n, x') + d(x, y_n)$$

$$d(x_n, y_n) - d(x, y)$$

טענה: $(*)\, d(x_n, y_n) - d(x, y) \le d(x, x_n) - d(y, y_n)$

הוכחה: $d(x_n, y_n) \le d(x_n, x) + d(x, y_n) \le d(x_n, x) + d(y, x) + d(y, y_n)$

$$0 \le m|d(x_n, y_n - d(x, y)) \le d(x, x_n) + d(y, y_n)$$

מקרה פרטי $y_n = a$ (סדרה קבועה). אם $x_n \to x$, אזי $\boxed{d(x_n, a) \to d(x, a)}$

טענה

מושג ההתכנסות (והגבול) יציב לגבי מעבר למטריקה שקולה.
כלומר אם $x_n \to x$ יחסית למטריקה d, אזי $x_n \to x$ יחסית למטריקה שקולה d', ולהפך.

הוכחה

$x_n \to x$ (יחסית ל-d) $\Leftrightarrow d(x_n, x) \to 0$

$$0 \le d'(x_n, x) \le Md(x_n x) \to 0$$

$$d'(x_n, x) \to 0$$

וההפך נובע מהסימטריות של תנאי שקילות.

המשך תכונות

ב) אם X מרחב נורמי ו-$x_n \to x$ ו-$y_n \to y$ אזי $x_n + y_n \to x + y$
וכן גם אם $x_n \to x$ ו-$\lambda_n \to \lambda$ (סקלרים) אזי $\lambda_n x_n \to \lambda x$

הוכחה

$$d(x_n + y_n, x + y) = \|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|m(x_n - x) + (y_n - y)\|$$

$$\le \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$d\left(x_n+y_n,x+y\right)\to 0$$

ולגבי כפל בסקלר:

$$d\left(\lambda_n x_n,\lambda x\right)=\|\lambda_n x_n-\lambda x\|=\|\left(\lambda_n-\lambda\right)x_n+\lambda\left(x_n-x\right)\|$$

$$\leq\left|\lambda_n-\lambda\right|\|x_n\|+|\lambda|\,\|x_n-x\|$$

תכונה ד' - ב$\mathbb{R}^k$

אם $x^n\to x$ ו$y^n\to y$ אזי $x^n\cdot y^n\to x\cdot y$.
$x\in\mathbb{R}^k$

x_i הרכיב הi של x, y_i הרכיב הy של i, $x\cdot y=\sum\limits_{i=1}^{k}x_i\cdot y_i$

$$\left|x^n y^n-xy\right|=\left|x^n\left(y^n-y\right)+\left(x^n-x\right)\cdot y\right|\leq\left|x^n\cdot\left(y^n-y\right)\right|+\left|\left(x^n-x\right)y\right|$$

$$\leq\|x^n\|_2\|y^n-y\|_2+\|x^n-x\|_2\|y\|_2$$

ז"א $x^n y^n\to xy$

הגדרה

תהי $\{x_n\}$ סדרה במרחב מטרי X.
<u>תת סדרה</u> שלה היא סדרה $\{x_{n_j}\}$, במקום שהאינדקסים n_j סדורים: $1\leq n_1<n_2<\ldots$.

$$x_n=\left(-1\right)^n$$

$$1\leq 2<4<6<\ldots\Rightarrow\{x_{2k}\}=\{1\}\to 1$$

$$1<3<5<7<\ldots\Rightarrow\{x_{2k-1}\}=\{-1\}\to -1$$

$n_j\geq j$ (באינדוקציה על j).

משפט

אם $x_n\to x$ אזי $x_{n_j}\to x$ לכל תת סדרה.

הוכחה

באמת: יהי $\epsilon > 0$ כלשהו. קיים $n(\epsilon)$ טבעי כך ש$d(x_n, x) < \epsilon$ לכל $n > n(\epsilon)$.
לכן: לכל $j > n(\epsilon)$ מתקיים $n_j \geq j > n(\epsilon)$
$d(x_{n_j}, x) < \epsilon$:(לכל $j > n(\epsilon)$)
$x_{n_j} \to x$

תוצאה

אם $\{x_n\}$ סדרה בX שיש לה תת-סדרה מתבדרת <u>או</u> שיש לה שתי תתדי סדרות המתכנסות לגבולות <u>שונים</u>, אזי $\{x_n\}$ מתבדרת.

משפט

לכל סדרה חסומה ב$\mathbb{R}^k$ יש תת סדרה מתכנסת.

הוכחה

תהי $\{x^n\}$סדרה חסומה ב$\mathbb{R}^k$.

מקרה א   הטווח שלה סופי

$$\left\{a^1, a^2, ...a^m\right\} \subseteq \mathbb{R}^k$$

$$A_1 = \left\{n \in \mathbb{N} \middle| x^n = a^1\right\} \subseteq \mathbb{N}$$

$$A_2 = \left\{n \middle| x^n = a^2\right\} \subseteq \mathbb{N}$$

$\bigcup\limits_{j=1}^{m} A_j = \mathbb{N}$, לכן לפחות אחת הקבוצות A_j היא אינסופית. $A_j = \{n_1, n_2, ..\}$
כאשר $1 \leq n_1 < n_2 < ...$. $\left\{x_{n_j}\right\}$ היא תת סדרה קבועה ולכן מתכנסת לa^j.

מקרה ב   הטווח של $\{x^n\}$ הוא אין סופי(הטווח=F).
אזי F היא קבוצה אינסופית וחסומה. לפי בולצנו ווירשטרס, יש לF <u>נקודת גבול</u> x.
<u>כלומר</u>: כל כדור $B(x, r)$ מכיל אין סוף נקודות של F.
$B(x, 1)$ מכיל אינסוף נקודות של F. קיים איפוא $1 \leq n_1$ כך ש$x^{n_1} \in B(x, 1)$.
$B\left(x, \frac{1}{2}\right)$ מכיל ∞ נק' של F. קיים לכן $n_1 < n_2$ כך ש $x^{n_2} \in B\left(x, \frac{1}{2}\right)$
באופן כללי, נקבל סדרה של מספרים טבעיים $1 \leq n_1 < n_2 < ...$ כך ש$x^{n_j} \in B\left(x, \frac{1}{j}\right)$.

ז"א $0 \leq d(x^{n_j}, x) < \frac{1}{j} \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$ ז"א $x^{n_j} \to x$.
ז"א שקיימת תת סדרה $\{x^{n_j}\}$ המתכנסת לx.