תרגיל מספר 3

תאריכי הגשה: הקבוצה של- יום ג': 9.11, יום ד': 10.11, יום ה': 11.11.

נא לכתוב על התרגילים שם, ת.ז. ומספר קבוצה!

תזכורת: 1) סדר של איבר $a \in G$ הוא המספר הטבעי <u>המינימלי</u> n כך ש- $a^n = 1$.
2) ת"ח = תת-חבורה.

1. א) מצאו את כל סדרי האיברים ב- $(Z_{12},+)$.

ב) מצאו את כל סדרי האיברים ב- $(u_{12}, \cdot)$ (חבורת האיברים ההפיכים כפלית ב- Z_{12}^*).

2. א) תהי *A* קבוצת כל הפונקציות $f:N\to N$ (כאשר $N = \{1,2,3\ldots\}$).
נגדיר ב-*A* פעולת חיבור כדלהלן:
לכל $f,g\in A$ נגדיר את הפונקציה: $f+g:N\to N$ ע"י $(f+g)(n) := f(n) + g(n)$ לכל n ב- N.
האם $(A,+)$ חבורה למחצה? האם יש ב-$(A,+)$ איבר יחידה?
ב) האם עבור $B = \{f:Z\to Z\}$ עם פעולת החיבור מסעיף א' מתקיים ש- $(B,+)$ חבורה למחצה? מונואיד? חבורה?

3. תנו דוגמא נגדית לטענות (השגויות) הבאות:
א) אם x,y איברים בחבורה $(G,*)$ ו- $<x> \neq <y>$ אז $|x*y| = |x|\cdot|y|$.
ב) תהי G חבורה מסדר זוגי. אם $x^3=y^3$ אז $x=y$.
ג) תהי G חבורה אבלית מסדר n. אז קיים איבר מסדר n ב-G.
ד) לא קיימת חבורה אינסופית G כך שלכל $a\in G$ מתקיים $a^2=e$.

4. יהי F שדה. נגדיר: $SL_n(F) = \{ A \in GL_n(F) : \det(A) = 1\}$ (כאשר $GL_n(F)$ היא חבורת המטריצות ההפיכות ביחס לכפל). הוכח ש - $SL_n(F) < GL_n(F)$ (כאשר הפעולה היא כפל).

5. א)

נגדיר $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in Z_3 \right\}$ (כאשר $Z_3 = \{0,1,2\}$ עם פעולות החיבור והכפל מודולו 3).

הוכיחו כי G חבורה ביחס לפעולת כפל מטריצות, מצאו את הסדר של G ואת הסדר של כל איבר ב G.
ב) תהי G חבורה. אם לכל $a,b \in G$ מתקיים $(ab)^3 = a^3b^3$ האם בהכרח G אבלית?

6. א) מצאו ב- $G = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,+)$ את כל התת-חבורות הציקליות (כאשר הפעולה היא חיבור (mod 2) רכיב-רכיב).
ב) הוכיחו שלחבורה $G = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,+)$ יש 3 תת-חבורות לא טריויאליות A,B,C כך ש $A \cup B \cup C = G$.
ג) הראו שחבורה אינה איחוד של שתי תת-חבורות לא טריויאליות (ז"א – שאינן כל החבורה או החבורה שמכילה רק את איבר היחידה). כלומר לכל חבורה G לא קיימות שתי תת-חבורות $H,K \le G$ כך ש $H \cup K = G$ (רמז: מה קורה כשמכפילים איבר מ H באיבר מ K?).