מבנים אלגבריים - תירגול 5

22 בנובמבר 2015

תהא G חבורה. $H \subseteq G$ תקרא תת חבורה (ת"ח) אם היא חבורה ביחס לפעולה של G.
סימון $H \leq G$
קריטריון לת"ח:
H היא ת"ח אם

1. $\forall h_1 h_2 \in H : \, h_1 h_2^{-1} \in H$
2. $H \neq \emptyset$ (או $e \in H$)

דוגמאות:

1. לכל חבורה G מתקיים כי $G, \{e\}$ הן ת"ח. הן נקראות ת"ח הטריוואליות.
2. לכל V מ"ו ת"ח שלו הן ת"מ $W \leq V$
3. לכל $n \in \mathbb{Z}$ מתקיים $n\mathbb{Z} = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\} \leq \mathbb{Z}$ תת חבורה, ואלו תתי החבורה היחידות שלו.
4. $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R}$
5. $A_n \leq S_n$
6. $\{A \in \mathbb{F}^{n\times n} | \, |A| = 1\} = SL_n(\mathbb{F}) \leq GL_n(\mathbb{F}) = \{A \in \mathbb{F}^{n\times n} | \, |A| \neq 0\}$
7. הקבוצה $\mathbb{Q}^{\times} \subseteq \mathbb{Q}$ אינה תת חבורה כי זה לא אותה פעולה.
8. קבוצת המחזורים מאורך 2 עם פונקצית הזהות, תת קבוצה של S_n. אינה תת חבורה כי $(1,2)\,(2,3)$ אינו מחזור מאורך 2.

יהיו G_1, G_2 חבורות. אזי $H_1 \times H_2 \leq G_1 \times G_2$ אם $H_i \leq G_i$.
שימו לב שאילו לא ת"ח היחידות. למשל $H = \{(1,1)\,, (0,0)\} \leq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ לא מהצורה $H = H_1 \times H_2$.
הגדרה: תהא G חבורה ו $A \subseteq G$ תת קבוצה. אזי $\langle A \rangle$היא הת"ח הכי קטנה שמכילה את A והיא מוגדרת

$$\langle A \rangle = \left\{ \prod_{i=1}^{n} a_i \,|\, a_i \in A \vee a_i^{-1} \in A \right\}$$

למשל $\sigma_1 = (1,2)\,, \sigma_2 = (1,2,\dots n) \in S_n$ מקיימות $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle = S_n$ (ש.ב.)
$\langle \sigma_1 \rangle = \{id, \sigma_1\}\,, \langle \sigma_2 \rangle = \left\{\sigma_2^i \,|\, i = 1, 2 \dots, n\right\}$
למשל $\langle G \rangle = G$
שימו לב שהסימון $\langle g \rangle = G$ עבור חבורה ציקלית מתלכד עם ההגדרה לעיל.